物理数学 1 演習 No.9 (00/6/15)

1. $f(z)$ が点 a 自身を除く a の近傍で正則であるとする。このとき a を中心とする適当な同心円 C_1, C_2 を考えると、それらの間の円環と C_1, C_2 で $f(z)$ が正則になる。C_1 の半径を C_2 の半径よりも大きくとることにする。(図を描くこと。)

   (a) z を円環内の点とする。

   $$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\ , \qquad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

   と置くと、$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ となることを示せ。

   (b) $f_1(z)$ を $z - a$ の巾級数に展開せよ。(No.7 の問題 5)

   (c) 次に $f_2(z)$ について考える。

   $$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^n$$

   と書くことができ右辺が収束することを示せ。

   (d) $-f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - a)^{-n}$ と展開できることを示し、a_{-n} の表式を求めよ。

   (e) これらの結果をまとめて、

   $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n\ , \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\,dz$$

   ただし C は C_1 の内部にあって C_2 を含むような任意の閉曲線、と書けることを示せ。これを点 a に関する $f(z)$ の Laurent 展開という。$z - a$ の負の巾 $(n \le -1)$ の部分を特異点 a に関する $f(z)$ の主要部という。主要部がない場合、a を除去可能な特異点といい、$f(a) = a_0$ と定義すれば $f(z)$ は a で正則となる。主要部が有限級数の場合、$a_{-n} \neq 0$ であるような最大の n を h として、a を $f(z)$ の h 位 (あるいは h 次) の極という。主要部が無限級数の場合、a を $f(z)$ の真性特異点という。

2. $z = a$ が $f(z)$ が n 位の零点のとき、$1/f(z)$ は $z = a$ で n 位の極を持つことを示せ。

3. $f(z) = z^{-1}(1 - z)^{-1}$ の $z = 0$ に関する Laurent 展開を求めよ。この展開が成り立つ範囲を示せ。また、$z = 1$ に関する Laurent 展開を求め、展開が成り立つ範囲を示せ。(図も描くこと。)

4. $f(z) = e^{1/z}$ とする。

   (a) $f(z)$ の $z = 0$ での Laurent 展開を求めよ。

   (b) この展開の成り立つ範囲を求めよ。

   (c) $z = 0$ はいかなる特異点か。

   (d) 任意の定数 $c \neq 0$ について、方程式 $e^{1/z} = c$ は $z = 0$ の近傍に無限個の解を持つことを示せ。(一般に a を真性特異点とすれば、$\lim_{z\to a} f(z)$ は不確定となり、極限のとり方により任意の値をとることができる。)

5. $z = \infty$ での関数 $f(z)$ の性質は $g(z) = f(1/z)$ の $z = 0$ での性質により決定される。z^n (n は自然数)、e^z、$\sin z$ について $z = \infty$ がいかなる特異点か調べよ。