物理数学 1 演習 No.8 (01/6/8)

1. 領域 $D$ で正則でかつ定数でない関数 $f(z)$ が、$D$ の点 $a$ に対して $f(a)=0$ であるとする。このとき $z=a$ の近傍で $f(z)=(z-a)^n f_n(z)$ と書ける。ただし $n$ は自然数、$f_n(z)$ はこの近傍で正則で $f_n(a)\neq 0$ である。($z=a$ を $f(z)$ の $n$ 位の零点という。) $f_n(a)=f^{(n)}(a)/n!$ であることを示せ。

2. $\{z_k\}\,(k=1,2,\cdots)$ を領域 $D$ 内の互いに異なる点からなる無限点列とし、$D$ の点 $z_0$ に収束しているものとする。

   (a) $f(z)$ が $D$ で正則で $f(z_k)=0\,(k=1,2,\cdots)$ ならば $f(z)\equiv 0$ であることを示せ。(結論を否定し、$z_0$ の近傍で問題 1 のように $f(z)$ を書き、$f_n(z)$ の連続性を用いて矛盾を導け。)

   (b) $f(z_k)=g(z_k)$ ならば、$D$ 全体で $f(z)=g(z)$ であることを示せ。これを一致の定理という。(注：$D$ 内の曲線や部分領域で $f(z)$ と $g(z)$ が一致すれば、その曲線や部分領域上に収束する点列がとれるから $D$ 全体で $f(z)$ と $g(z)$ が一致する。)

3. 閉領域 $D$ で $f(z)$ が正則とする。

   (a) Cauchy の積分表示と一致の定理を用いて、$D$ の内部の点で $|f(z)|$ が最大値をとると仮定すると $D$ で $f(z)$ が定数となることを示せ。このことから、$|f(z)|$ は $D$ の境界上でその最大値をとることがわかる。

   (b) $D$ で $f(z)\neq 0$ ならば、$|f(z)|$ は $D$ の境界上で最小値をとることを示せ。($1/f(z)$ を考えよ。)

   (c) 3b を用いて、代数方程式 $f(z)\equiv\sum_{k=0}^{n} a_k z^k=0\ (n\geq 1,\ a_n\neq 0)$ が解を持つことを示せ。

4. $f(z)$ は $|z|<1$ で正則で、$f(0)=0$、$|f(z)|\leq 1$ であるとする。

   (a) $g(z)=f(z)/z$ とおく。$z=0$ は除去可能な特異点である。$|z|<1$ で $g(z)$ が正則となるためには、どのように $g(0)$ を定めたらよいか。

   (b) $0<r<1$ として、$|z|\leq r$ で $|g(z)|\leq 1/r$ であることを示せ。(3a を用いよ。)

   (c) $|z|<1$ で $|f(z)|\leq|z|$ であることを示せ。($r\to 1$ とせよ。)

   (d) ある 1 点 $z_0\,(0<|z_0|<1)$ で $|f(z_0)|=|z_0|$ が成り立つか、または $|f'(0)|=1$ のとき、$f(z)=e^{ic}z$ ($c$ は実定数) となることを示せ。(c)、(d) の結果を Schwarz の定理という。

5. $f(z)$ が $|z|<1$ で正則で $f(0)=0$、$|f(z)|\leq 1$ ならば $|f'(0)|\leq 1$ であることを示せ。