物理数学 1 演習 No.7 略解 (01/6/6)

1.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

で、$z - z_0 = Re^{i\theta}$ と置くと、

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-in\theta} f(z_0 + Re^{i\theta}).$$

この表式より、

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi} d\theta\, |f(z_0 + Re^{i\theta})| \le \frac{n!M}{R^n}.$$

2.

$$\lim_{z\to z_1}\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1)\right| = \lim_{z\to z_1}\left|\frac{\int_{z_1}^{z} d\zeta (f(\zeta)-f(z_1))}{z-z_1}\right|$$

右辺の積分は経路に依らないから、z と z_1 を結ぶ線分にとる。δ を十分に小さくとり、$|z-z_1| < \delta$ のとき $|f(\zeta)-f(z_1)| < \epsilon$ とすれば、f は連続ゆえ $\delta \to 0$ で $\epsilon \to 0$ とできる. $|\int_{z_1}^{z} d\zeta (f(\zeta)-f(z_1))| < \epsilon|z-z_1|$ となるから

$$\lim_{z\to z_1}\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1)\right| < \lim_{\delta\to 0}\epsilon = 0.$$

3. $\int_{z_0}^{z} f(z)d\zeta$ が経路に依らないから、前問より $F'(z) = f(z)$. すなわち $f(z)$ は正則関数の微分。正則関数は何回でも微分可能だから (No. 6 の問題 4)、$f(z)$ も微分可能。

4. $|f(z)| \le M$ とする。

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right| = \frac{1}{2\pi R}\left|\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-i\theta} f(\zeta)\right| \le \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\theta\, |f(\zeta)| \le \frac{M}{R}.$$

$z \to \infty$ として、$f'(z) = 0$.

5. (a)

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a-(\zeta-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n$$

(b) 略。

(c) 略。

6. $h'(z)f(z) = f'(z)$. $f(z) = j(z)e^{h(z)}$ と置くと、$f'(z) = j'(z)e^{h(z)} + h'(z)f(z)$. よって、$j'(z)e^{h(z)} = 0$. すなわち、$j'(z) = 0$ で、$j(z) = A$(定数) となる。