物理数学 1 演習 No.7 (01/6/1)

1. $|z-z_0| \le R$ で $f(z)$ は正則で $|f(z)| \le M$ とする。Cauchy の不等式

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n}$$

を示せ。

2. 領域 D で $f(z)$ が連続であるとし、z_0 を D の定点、z を D の任意の点とする。$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ が z_0 と z を結ぶ D 内の曲線のとり方に依らないとき、$F(z)$ が $f(z)$ の原始関数、すなわち $F'(z) = f(z)$ であること示せ。($\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1)$ で $z \to z_1$ の極限を考えよ。)

3. 領域 D で $f(z)$ が連続で、D 内のすべての閉曲線 C について $\oint_C f(z)dz = 0$ ならば、$f(z)$ は D で正則であること (Morera の定理) を示せ。(2 の結果を用いよ。)

4. $|z| < \infty$ で正則な関数を整関数という。有界な整関数は定数であること (Liouville の定理) を証明せよ。(微分についての Cauchy の積分公式を用いて $f'(z) = 0$ を示せ。)

5. $f(z)$ は領域 D で正則であるとする。D 内の任意の点 a を中心とし D に含まれる円を C とする。z を C 上の点、ζ を C の内部の点とする。

   (a) 次の式を示せ。

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

   (注：$|\zeta-a|/|z-a| < 1$ であるからこの級数は収束する。)

   (b) 上式の両辺に $f(z)$ をかけ、C に沿って積分することにより、

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta-a)^n\,, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

   と書けることを示せ。すなわち、$f(z)$ は任意の正則な点 a で Taylor 級数に展開できる。

   (c) 上の Taylor 展開の式を n 回微分することにより、高階微分についての Cauchy の積分公式 (No. 6 の問題 4) を導け。

6. $f(z)$ は零点を持たない整関数であるとする。このとき、$g(z)$ を整関数として $f(z) = e^{g(z)}$ と書けることを示せ。($h(z) = \int_0^z f'(\zeta)/f(\zeta)d\zeta$ とおき、$f(z) = Ae^{h(z)}$ を導け。)