物理数学 1 演習 No.6 (01/5/25)

1. 閉曲線 C および C の内部で $f(z)$ は正則とする。

   (a) z を C の内部の点、C_r を $|\zeta - z| = r$ の円周とし、r を十分小さくとり C_r が C の内部に含まれるようにする。このとき

   $$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

   であることを示せ。

   (b) 右辺の積分を $r \to 0$ の極限で評価し、Cauchy の積分公式

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

   を導け。

   (c) z が C の外部の点の場合はどうなるか。

2. Cauchy の積分公式を用いて次の積分を求めよ。

   $$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz\,, \qquad \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{(2z-1)(z+1)}\,, \qquad \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$

3. 微分の定義

   $$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}$$

   に Cauchy の積分公式を用いて

   $$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta$$

   を示せ。

4. 前問の操作を繰り返すことにより

   $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

   を導け。すなわち正則関数は何回でも微分できる。

5. 次の積分を求めよ。ただし、n は整数とする。

   $$\oint_{|z|=1} e^z z^n dz$$