物理数学 1 演習 No.5 略解 (01/5/24)

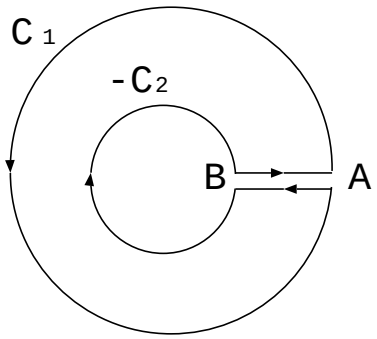
1. $dz = ire^{i\theta}d\theta$ を用いる。答えは、$n = -1$ のとき $2\pi i$、それ以外のときは 0。

2. (a) 略。

   (b) $\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$.

   (c) 実部については、(a) で $V_x = u$, $V_y = -v$ とおいて Cauchy-Riemann を用いる。虚部は $V_x = v$, $V_y = u$ とすればよい。

3. z_1 から z_2 へ至る 2 つの積分路 C_1, C_2 を考えると、Cauchy の積分定理より $\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = 0$.

4. $\oint zdz = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+iy)idy + \int_1^0 (x+i)dx + \int_1^0 iy\,idy = 0$.
   $\oint \bar{z}dz = \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1-iy)idy + \int_1^0 (x-i)dx + \int_1^0 -iy\,idy = 2i$. この積分は積分路に囲まれる面積の $2i$ 倍になっていることに注意。(レポート No.1 の問題 5)

5. 下図のような積分路 C を考えれば、Cauchy の積分定理により、$\oint_C f(z)dz = 0$. AB 間の積分は往復で打ち消し合う。