物理数学 1 演習 No.5 (01/5/18)

1. 積分路 C を中心 a、半径 $r(>0)$ の円とするとき次の積分を求めよ。

$$\oint_C (z-a)^n dz$$

($z = a + re^{i\theta}$ と置き、θ について積分せよ。)

2. Stokes の定理を使って Cauchy の積分定理を証明しよう。

(a) Stokes の定理

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

で、閉曲線 C(およびそれに囲まれる面 S) を $x-y$ 平面にとる。このとき上式は、

$$\oint_C (V_x dx + V_y dy) = \int_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx\, dy$$

となることを示せ。

(b) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とし、$dz = dx + idy$ を使って $\oint_C f(z)dz$ を実部と虚部に分けよ。

(c) 上の結果を用いて、$f(z)$ が C および C の内部で微分可能であるとき、Cauchy の積分定理

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

を示せ。

3. $f(z)$ が単連結な領域 D で正則であるとき、積分 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ が積分路に依らないことを示せ。(このとき $F(z) = \int^z f(z)dz$ とすれば、$F'(z) = f(z)$ となる。)

4. 点 $O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1)$ を直線で結ぶ正方形の積分路 $OABCO$ を考え、実際に積分を実行することにより

$$\oint z dz = 0\,, \qquad \oint \bar{z} dz \neq 0$$

であることを確かめよ。

5. 閉曲線 C_1 の内部に閉曲線 C_2 があり、C_1 と C_2 に狭まれる環状の閉領域で $f(z)$ が正則ならば、

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

であることを示せ。