物理数学 1 演習 No.4 略解 (01/5/31)

1. z_0 で $z_1(t)$ と $z_2(t)$ がなす角を θ、w_0 で $f(z_1(t))$ と $f(z_2(t))$ がなす角を φ とする。

$$\begin{aligned}
\varphi &= \lim_{t\to 0} \arg \frac{f(z_2(t)) - f(z_0)}{f(z_1(t)) - f(z_0)} \\
&= \lim_{t\to 0} \arg \frac{f(z_2(t)) - f(z_0)}{z_2(t) - z_0} \frac{z_1(t) - z_0}{f(z_1(t)) - f(z_0)} \frac{z_2(t) - z_0}{z_1(t) - z_0} \\
&= \arg \left(f'(z_0) \frac{1}{f'(z_0)} \right) + \theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

2. (a) $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ゆえ、$u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. よって、直線 $u = a$ は双曲線 $x^2 - y^2 = a$ になる。また、直線 $v = b$ は双曲線 $2xy = b$ になる。

   (b) 略。

3. $z = re^{i\theta}$ とすると、$r \neq 0$ として、$u + iv = \log r + i(\theta + 2\pi n)$. よって、$u = a$ は $r = e^a$(円)、$v = b$ は $\theta = b - 2\pi n$(動径) となる。

4. Cauchy–Riemann の関係式と、u, v がそれぞれ Laplace 方程式を満すことを用いる。

5. (a) 問題 3 と同様で、$u = \log a$ と $u = \log b$ の平行な直線になる。

   (b) $\Phi(u, v)$ が v に依存しないのは明かだから、Laplace 方程式の解は、$\Phi(u, v) = c_1 u + c_2$. $\Phi(\log a, v) = 0$、$\Phi(\log b, v) = \phi_0$ より c_1, c_2 を決めて、$\Phi(u, v) = \phi_0 (u - \log a)/(\log b - \log a)$ を得る。

   (c) $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = \phi_0 \log(r/a)/\log(b/a)$. ただし、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$.