物理数学 1 演習 No.4 (01/5/11)

1. $w = f(z)$ が $z_0$ で微分可能で $f'(z_0) \neq 0$ であるとする。$z_0$ で接線をもつ 2 つの曲線 $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $z_0 = z_1(0) = z_2(0)$ を考える。これらの曲線が $z_0$ でなす角とそれらの $f(z)$ による像曲線が $w_0 = f(z_0)$ でなす角が等しいことを示せ。(これを、$f(z)$ は $z_0$ で等角である、という。)

2. $w = u + iv = z^2$ $(z = x + iy)$ について考える。

   (a) $w$ 平面 ($u$–$v$ 平面) の直線 $u = a$ および $v = b$ は $z$ 平面 ($x$–$y$ 平面) ではどのような曲線になっているか調べよ。(図も書くこと。)

   (b) 上の 2 直線について等角性確かめよ。

3. 前問と同様のことを $w = \log z$ について行なえ。

4. $w = f(z)$ は (ある領域で) 正則であるとする。$w$ 平面で $\Phi(u, v)$ が Laplace 方程式を満しているとき、$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$ が $z$ 平面で Laplace 方程式を満すことを示せ。

5. 無限に長い半径 $a, b$ $(0 < a < b)$ の 2 つの同軸導体円筒を考える。中心軸に垂直な断面を $x$–$y$ 平面とし、中心軸は $x$–$y$ 平面の原点を通っているものとしよう。すなわち、同軸導体円筒の $x$–$y$ 平面での断面は原点を中心とする同心円になっている。内側の円筒を接地し外側の円筒の電位を $\phi_0$ としたときの、2 つの円筒間の任意の点での電位を求めたい。2 つの円筒間には電荷は存在しないから電位 $\phi(x, y)$ は Laplace 方程式 $\Delta\phi = 0$ を満す。

   (a) $z = x + iy$ として、$w = u + iv = \log z$ により上の $x$–$y$ 平面の同心円は $u$–$v$ 平面上にどのように写されるか。

   (b) $u$–$v$ 平面で Laplace 方程式を解き、2 つの導体間の任意の点での電位 $\Phi(u, v)$ を求めよ。

   (c) 問題 4 の結果を用いて $x$–$y$ 平面での電位 $\phi(x, y)$ を求めよ。