物理数学 1 演習 No.3 略解 (01/6/7)

1. (a) $f(z) = u+iv = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$ だから、$u = x^2-y^2,\ v = 2xy.\ u_x = 2x = v_y,\ u_y = -2y = -v_x.$

   (b) $f'(z) = nz^{n-1}.$

   (c) $f_x = -if_y\,(= f'(z))$ を満すようにすればよい。$f(z) = az^3.$

   (d) Cauchy-Riemann の関係を満さないことは簡単に分る。

   (e) $f(z) = x^2+y^2$ だから、$u = x^2+y^2,\ v = 0.\ u_x = 2x,\ u_y = 2y,\ v_x = v_y = 0.$ 原点でのみ Cauchy-Riemann の関係を満す。

2. (a) $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ だから、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0.$ すなわち u も v も定数。

   (b) $\mathrm{Re}f(z) =$ 定数 のとき、$u =$ 定数 で $u_x = u_y = 0.$ このとき、Cauchy-Riemann の関係より $v_x = v_y = 0.$ $\mathrm{Im}f(z) =$ 定数 のときも同様。

   (c) $|f(z)|^2 = u^2+v^2 =$ 定数. 微分して、$u_xu+v_xv = 0,\ u_yu+v_yv = 0.$ これらが $u^2+v^2 \neq 0$ であるような解を持つためには $|f'(z)|^2 = u_x^2+v_x^2 = 0.$ (a) に帰着した。

   (d) $f(z)$ と $\bar{f}(z)$ それぞれに対する Cauchy-Riemann の関係より、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ を得る。

   (e) $u = kv$ (k : 定数, $v \neq 0$) と置ける。このとき $(1+ik)f(z) = i(ku+v)$ だから、(b) より $(1+ik)f(z) =$ 定数。

3. (a) 略。

   (b) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ と Cauchy-Riemann の関係が同値であることを示せばよい。

   (c) z と $\bar{z}$ を独立変数として微分する。$\bar{z}$ を含むものは、(z の関数として) 正則でない。

   (d) 正則でない。

4. 動径方向の微分と角度方向の微分が一致することから、

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \theta} = -R\frac{\partial \Theta}{\partial r}\,.$$