物理数学 1 演習 No.3 (01/4/27)

1. 複素変数の複素関数がある領域 D で微分可能であるとき、領域 D で正則であるという。また、ある点 $z_0$ とその近傍で微分可能であるとき、$z_0$ で正則という。

   (a) $f(z) = z^2$ が $|z| < \infty$ で Cauchy-Riemann の方程式を満していることを示せ。すなわち $z^2$ は $|z| < \infty$ で正則である。

   (b) $f(z) = z^n$ の微分を求めよ。

   (c) $f(z) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ $(z = x + iy)$ が正則であるための $a, b, c, d$ に対する条件を求め、$f(z)$ を $z$ で表せ。

   (d) $f(z) = \bar{z}$ はどの点でも正則でないことを示せ。

   (e) $f(z) = |z|^2$ は原点以外では微分不可能であることを示せ。(すなわち全平面で正則でない。)

2. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は領域 D で正則な関数とする。

   (a) D で $f'(z) = 0$ のとき、$f(z)$ は D で定数であることを示せ。

   (b) D で $\mathrm{Re} f(z) =$ 定数 または $\mathrm{Im} f(z) =$ 定数 のとき、$f(z)$ は D で定数であることを示せ。

   (c) D で $|f(z)| =$ 定数 のとき、$f(z)$ は D で定数であることを示せ。

   (d) $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ も D で正則関数であれば、$f(z)$ は D で定数であることを示せ。

   (e) D で $\arg f(z)$ が定数であるとき、$f(z)$ は D で定数であることを示せ。

3. 全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

   を考える。

   (a) $dz = dx + idy$、$d\bar{z} = dx - idy$ と定め、

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

   と書くとき、

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

   であることを示せ。

   (b) $f(z)$ が微分可能であることと $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ は同値であることを示せ。

   (c) この結果を用いて、1a、1d、1e を再考察せよ。

   (d) $\mathrm{Re}\, z = (z + \bar{z})/2$ は正則か。

4. 極座標を用いて $f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$ と書くとき、$R, \Theta$ についての Cauchy-Riemann の条件を導け。