物理数学 1 演習 No.2 略解 (01/6/14)

1. (a) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ゆえ、$y \to y + 2\pi n$ で不変。周期は 2π.

   (b) $\log z = \log |z| + i(\theta + 2\pi n)$.

   (c) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ でなければならないが、これは成り立たない場合がある。(2π だけ異なり得る。)

2. $$\arccos z = \pm i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),\ \arcsin z = \pi/2 \mp i \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),\ \arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

3. (a) $a > 0$ あるいは b が整数のとき。

   (b) q 価。

4. (a) $\delta y = 0$ とする。

   (b) $\delta x = 0$ として、
   $$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y}$$

   (c)
   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   (d) 略。

   (e) $\delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y$, $\delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y$ と書ける。
   $$\lim_{\delta z \to 0} \frac{\delta f}{\delta z} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\delta x + (\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y})\delta y}{\delta x + i\delta y}$$
   Cauchy-Riemann の関係式を用いると、
   $$= \lim_{\delta z \to 0} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(\delta x + i\delta y)}{\delta x + i\delta y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$