物理数学 1 演習 No.1 略解 (01/6/17)

1. (a)
$$s = \frac{1}{2}\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad t = \frac{1}{2i}\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \quad u = \frac{z\bar{z}}{1+z\bar{z}}\,.$$
(b) $z = re^{i\theta}$ とおいて、$r \to \infty$ とすれば、$s \to 0$, $t \to 0$, $u \to 1$ となる。

2. (a)
$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_1^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{z_1^m}{m!}\frac{z_2^n}{n!}\,.$$
$m+n=k$ として、
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{z_1^{k-n}z_2^n}{(k-n)!n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}\,.$$
(b) 上の結果より、$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$.
$e^{iy} = 1 + iy - y^2/2 - iy^3/3! + \cdots = 1 - y^2/2 + \cdots + i(y - y^3/3! + \cdots) = \cos y + i\sin y$.

3. (a)
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$$
とすると、
$$(f\cdot g)(z) = f(g(z)) = \frac{(ap+br)z + aq + bs}{(cp+dr)z + cq + ds} \in L\,.$$
(b)
$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}\,.$$
(c)
$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{cb-ad}{c(cz+d)}$$
と書き直せばよい。
(d) $z = re^{i\theta} = x + iy$ とすると、$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta - i\frac{1}{r}\sin\theta\,.$$
$1/z = w = \rho e^{i\varphi}$ とおけば、$\rho = 1/r, \varphi = -\theta$. $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D =$ は $Ar^2 + Br\cos\theta + Cr\sin\theta + D = 0$ と書ける。さらに $D\rho^2 + B\rho\cos\varphi - C\rho\sin\varphi + A = 0$ と書き直せるが、これは w 平面上の円または直線を表している。

4. 略。

5. $\{\mu_k\} = \{e^{2\pi ik/n} \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\}$.
$z^n - 1 = (z-\mu_0)(z-\mu_1)\cdots(z-\mu_{n-1})$ と書ける。一方、$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1)$. $\mu_0 = 1$ ゆえ、$(z-\mu_1)\cdots(z-\mu_{n-1}) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$.
この式で $z = 1$ とすればよい。