物理数学 1 演習 No.15 略解 (01/9/14)

1.

$$a(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega_0/(2Q) - i(\omega - \omega_0)} , \qquad |a(\omega)|^2 = \frac{|A_0|^2}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_0/(2Q)}$$

2. (a) 部分積分を用いて、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} e^{i\alpha x}\, dx = -i\alpha Y(\alpha, t)$$

(b) 上と同様にして、$\partial^2 y/\partial x^2$ の Fourier 変換は、$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t)$ となる。従って、問題の偏微分方程式を Fourier 変換すると

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(\alpha, t)$$

を得る。

(c) $Y(\alpha, 0) = F(\alpha)$ ゆえ、$Y(\alpha, t) = F(\alpha) e^{\pm i\alpha v t}$ となる。

(d)

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t) e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)}\, d\alpha$$

となり、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

を用いると、$y(x,t) = f(x \mp vt)$ となる。

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\lambda) e^{i\lambda t}\, d\lambda \right) dt$$

積分の順序を交換すると、

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, F(\omega) G^*(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda - \omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, F(\omega) G^*(\lambda) \delta(\lambda - \omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega$$

4. (a)

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$$

(b) $a = 1$ と置いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{\pi}{2}} F(\omega) \right|^2 d\omega = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \pi$$

5. (a) $L[f(t)] = 1/(s - k)$ $(\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, k)$.

(b) 上の結果より、$L^{-1}[1/(s-k)] = e^{kt}$.

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} F(z)\, L^{-1}\left[\frac{1}{s - z} \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} F(z) e^{zt}\, dz$$