物理数学 1 演習 No.15 (00/9/14)

1. 次のような減衰振動を考える。

$$A(t) = \begin{cases} A_0 e^{-(\omega_0/2Q)t} e^{-i\omega_0 t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$A(t)$ の Fourier 変換 $a(\omega)$ を求めよ。$Q \gg 1$ のとき、振動数分布 $|a(\omega)|^2$ が $\omega = \omega_0$ にするどいピークを持つことを確かめよ。

2. 次のような 1 次元波動方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

初期条件は $y(x,0) = f(x)$ とし、十分遠方で $y(x,t)$ は消えるものとする。

(a) $y(x,t)$ の x についての Fourier 変換を $Y(\alpha,t)$ とするとき、$\partial y(x,t)/\partial x$ の Fourier 変換を $Y(\alpha,t)$ で表せ。

(b) $Y(\alpha,t)$ の満す方程式を導け。(これは常微分方程式となる。)

(c) $f(x)$ の Fourier 変換を $F(\alpha)$ として、上の方程式を解き $Y(\alpha,t)$ を求めよ。

(d) Fourier 逆変換を用いて、$y(x,t) = f(x \mp vt)$ となることを示せ。(2 つの解はそれぞれ x 軸の正負の方向に進む波を表している。)

3. $f(t)$、$g(t)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(\omega)$、$G(\omega)$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega \tag{1}$$

となることを示せ。(* は複素共役を表す。)

4. (a) 矩形パルス

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

の Fourier 変換を求めよ。

(b) 上の結果と式 (1) を用いて積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

の値を求めよ。

5. (a) 次の関数の Laplace 変換を求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} e^{kt}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(b) ある関数 $f(t)$ の Laplace 変換を $F(s)$ とする。$F(z)$ が $\mathrm{Re}\, z \geq \tau$ で正則であるとすると、Cauchy の積分公式より、$\mathrm{Re}\, s \geq \tau$ のとき、

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \frac{F(z)}{s-z}\, dz$$

と書ける。(積分路は右半円で閉じ、半円上の積分はゼロとなるものとする。)
上の結果を用いて、逆 Laplace 変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

を導け。