物理数学 1 演習 No.13 略解 (01/9/4)

1. (a) a の近傍で $f(z) = (z-a)^n g(z)$ ($g(z)$ は正則で $g(a) \neq 0$) と書ける。

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

となるから、$z = a$ は 1 位の極で留数は n。

(b) $1/f(z) = (z-a)^n g(z)$ と書けることを用いればよい。

(c) 留数定理と (a)、(b) を用いる。

(d) 対数の分岐を適当に 1 つ定めて、

$$\oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \oint_{\partial D} \frac{d\log f(z)}{dz}\,dz = \Delta_{\partial D} \log f(z) = \Delta_{\partial D} \log|f(z)| + i\Delta_{\partial D} \arg f(z)$$

となる。最後の式の第 1 項はゼロ。これと (c) の結果を用いればよい。

2. $w(z) = 1 + g(z)/f(z)$ とすると、$|g(z)/f(z)| < 1$ ゆえ、∂D 上を z が 1 周するとき、$w(z)$ は $w = 0$ の周りをまわらない。よって、$\Delta_{\partial D} \arg(1 + g(z)/f(z)) = 0$。従って、$\Delta_{\partial D} \arg(f(z)+g(z)) = \Delta_{\partial D} \arg f(z)$。一方、3(d) から $\Delta_{\partial D} \arg(f(z)+g(z)) = 2\pi N_0(f+g)$、$\Delta_{\partial D} \arg f(z) = 2\pi N_0(f)$。ただし、$N_0(f)$ は D 内の $f(z)$ の零点の数、などとする。よって、$N_0(f+g) = N_0(f)$。

3. ヒントのように $f(z)$、$g(z)$ をとると、$|z| \to \infty$ で $|g(z)/f(z)| \to 0$ となる。R を十分大きくとると、$|z| = R$ 上で $|f(z)| > |g(z)|$ で $f(z) + g(z) \neq 0$ とできる。Rouché の定理より $|z| < R$ での $f(z)$ と $f(z) + g(z)$ の零点の個数は等しい。$f(z)$ は $z = 0$ で n 個の零点を持ち、それ以外に零点を持たないから、$f(z) + g(z)$ も $|z| < R$ で n 個の零点を持つ。$f(z) + g(z)$ は $|z| > R$ で零点を持たないから、$f(z) + g(z)$ の零点の数は n である。

4. 略。

5. (a) $t \to 0$ で積分が収束するため。

(b) 部分積分する。

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ を用いる。