物理数学 1 演習 No.13 (01/7/13)

1. $f(z)$ は領域 D で有理型で D の境界で零点も極も持たないとする。

   (a) $z=a$ が $f(z)$ の n 位の零点であるならば、$z=a$ は $f'(z)/f(z)$ の 1 位の極でその留数は n であることを示せ。

   (b) $z=a$ が $f(z)$ の n 位の極であるならば、$z=a$ は $f'(z)/f(z)$ の 1 位の極でその留数は $-n$ であることを示せ。

   (c) ∂D を D の境界とすると、

   $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_\infty$$

   であることを示せ。ただし、$N_{0(\infty)}$ は $f(z)$ の D 内の零点 (極) の数を表し、n 位の零点 (極) は n 個と数えるものとする。

   (d) ∂D に沿って 1 周したときの $f(z)$ の位相の変化を $\Delta_{\partial D}\arg f(z)$ と書くことにすると、$\Delta_{\partial D}\arg f(z) = 2\pi(N_0 - N_\infty)$ であることを示せ。

2. $f(z), g(z)$ は領域 D で正則で、∂D 上で $|f(z)| > |g(z)|$ であるとする。このとき、D 内での $f(z)+g(z)$ の零点の個数と $f(z)$ の零点の個数は等しいことを示せ。これを Rouché の定理という。($\arg\{f(z)+g(z)\} = \arg f(z) + \arg\{1 + g(z)/f(z)\}$ で $\Delta_{\partial D}\arg\{1+g(z)/f(z)\} = 0$ を示し、前問の結果を用いよ。)

3. Rouché の定理を用いて代数方程式 $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ $(n \geq 1,\, a_n \neq 0)$ が n 個の解を持つことを示せ。($f(z) = a_n z^n,\, g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ とするとよい。)

4. Γ 関数を次の極限で定義する。(Gauss)

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\,n^z\,, \quad z \neq 0, -1, -2, \cdots$$

   (a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ であることを示せ。

   (b) $\Gamma(1) = 1$ であることを示せ。

   (c) $\Gamma(n) = (n-1)!$ (n は正の整数) であることを示せ。

5. Γ 関数を次の積分で定義する。(Euler の積分)

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\,, \quad \mathrm{Re}z > 0$$

   (a) $\mathrm{Re}z > 0$ の条件はなぜ必要か。

   (b) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$、$\Gamma(1) = 1$ となっていることを確かめよ。

   (c) $t \to t^2$ と変数変換することにより、$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を示せ。