物理数学 1 演習 No.12 略解 (01/7/10)

1. 留数定理より、図の積分路 C に対して、

$$\int_C \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = -2\pi i a e^{i\pi a}\,.$$

一方、 z^a の分岐として、$0 \le \arg z < 2\pi$ をとると、

$$\int_C \frac{z^a}{(z+1)^2}dz = \int_{|z|=\epsilon} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz + \int_\epsilon^R \frac{x^a}{(x+1)^2}dx + \int_R^\epsilon \frac{(xe^{2\pi i})^a}{(x+1)^2}dx + \int_{|z|=R} \frac{z^a}{(z+1)^2}dz$$

となり、右辺第 $1(4)$ 項は $\epsilon \to 0 (R \to \infty)$ の極限でゼロになる。よって、

$$-2\pi i a e^{i\pi a} = (1 - e^{2\pi i a})I$$

となり、$I = \pi a / \sin \pi a$ を得る。

2. (a) $PI(\sigma) = 0.$

   (b) 実軸と上半面の半円からなる積分路を考えて、$I(\sigma + i\gamma) = \pi i/(\sigma + i\gamma).$ よって、$I_+(\sigma) = \pi i/\sigma.$

   (c) $I_-(\sigma) = -\pi i/\sigma.$

3. (a) $z = n\pi (n$ は整数。$)$ が 1 位の極。留数はすべて 1。

   (b) 第 1 項は $1/(z-\zeta)$ の極の寄与で、第 2 項は $\cot z$ の極の寄与。

   (c) $\cot z/z$(偶関数) の積分は積分路の対称性によりゼロ。残りの積分は $R \to \infty$ でゼロになる。

   (d) 略。

4. 前問の結果を使うと

$$\frac{d}{dz}\log\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right)$$

となる。$0 \le z < \pi$ として両辺を実軸上で 0 から z まで積分すると、

$$\log\frac{\sin z}{z} = \log\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

となる。これから示すべき式が得られる。この結果は全平面に解析接続される。