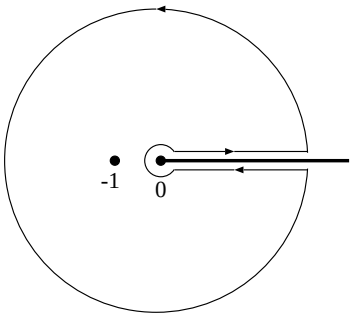
物理数学 1 演習 No.12 (01/7/6)

1. 積分

$$I = \int_0^\infty \frac{x^a}{(x+1)^2}\,dx \quad (-1 < a < 1)$$



求めたい。被積分関数を複素関数とみなすと $(x \to z)$、$z = -1$ に極、$z = 0$ に分岐点を持つ。切断線を正の実軸にとることにして、図のような積分路を考えて I を求めよ。

2. 積分

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 - \sigma^2} \quad (\sigma > 0)$$

について考える。この積分は積分路上に極を持つからこのままでは不定である。

(a) 主値をとることはこの積分を確定する一つの方法である。$PI(\sigma)$ を求めよ。

(b) $\sigma \to \sigma + i\gamma$ $(\gamma > 0)$ として極の位置を実軸上から少しだけずらしてやれば上の積分は実行でき、その後で $\gamma \to 0$ とすれば $I(\sigma)$ の一つの値が確定する。すなわち、$I_+(\sigma) = \lim_{\gamma\to 0} I(\sigma + i\gamma)$ を定義するのである。$I_+(\sigma)$ を実際に計算せよ。

(c) 同様にして $I_-(\sigma) = \lim_{\gamma\to 0} I(\sigma - i\gamma)$ を計算せよ。

3. $\cot z$ を部分分数に分割することを考える。

(a) $\cot z$ のすべての極の位置、位数、留数を求めよ。

(b) $x = \pm R,\ y = \pm R\,(R = n\pi + \pi/2)$ で囲まれた正方形の周を C とする。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cot z}{z-\zeta}\,dz = \cot\zeta + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k\pi - \zeta}$$

であることを示せ。ただし、$\zeta \neq k\pi,\ |\zeta| < R$ とする。

(c) $n \to \infty$ で上式の左辺の積分が 0 になることを示せ。ヒント：

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z(z-\zeta)}$$

(d)

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

を示せ。

4. 前問の結果と

$$\frac{d}{dz}\log\frac{\sin z}{z} = \cot z - \frac{1}{z}$$

を用いて

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

を示せ。