物理数学 1 演習 No.11 略解 (01/6/29)

1. $d\theta = dz/(iz)$、$\cos\theta = (z + 1/z)/2$、$\sin\theta = (z - 1/z)/(2i)$ を用いる。

   (a) $2\pi/\sqrt{a^2 - b^2}$.

   (b) $\pi(2n-1)!!/(2n)!!$.

   (c) $2\pi/(ab)$.

2. (a) π.

   (b)

   $$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx$$

   と考えればよい。答えは $\pi e^{-a}/a$.

3. 略。

4. $\pi/2$. この積分は確定しているから、原点を下半面に迂回しても答えは同じはずである。具体的には

   $$2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z} = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz + i\pi$$

   となる。右辺の第 2 項は原点を下半面に迂回する小半円からの寄与である。左辺は $2\pi i$ であるから、

   $$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz = \pi i$$

   を得る。