物理数学 1 演習 No.10 (01/6/22)

1. $f(z) = 1/(z^2+1)$ の $z = \pm i$ での Laurent 展開を求め、その展開が成り立つ範囲を示せ。

2. $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ で $f_1(z)$、$f_2(z)$ は正則であるとする。$f_2(a) = 0$、$f_2'(a) \neq 0$、$f_1(a) \neq 0$ とすると、$f(z)$ の Laurent 展開の係数について $a_{-1} = f_1(a)/f_2'(a)$ が成り立つことを示せ。

3. $f(z)$ は $0 < |z-a| < r$ で正則とする。$0 < \rho < r$ として $z = a$ における $f(z)$ の留数 (residue) を

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

で定義する。(この値は ρ に無関係である。)

$f(z)$ の Laurent 展開を $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ として、$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = a_{-1}$ であることを示せ。

4. $f(z)$ は $z = a$ で極を持つとする。

   (a) $z = a$ が 1 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

   であることを示せ。

   (b) $z = a$ が 2 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{d}{dz} \{(z-a)^2 f(z)\}$$

   であることを示せ。

   (c) $z = a$ が n 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}$$

   であることを示せ。

5. $f(z) = (z^2+z+1) z^{-2} (z-1)^{-1}$ の特異点とその留数を求めよ。

6. $f(z) = z^2 e^{1/z}$ の $z = 0$ での留数を求めよ。