物理数学 1 演習 No.1 (2001/4/13)

1. 3 次元空間の球面 $S^2 : x^2 + y^2 + u^2 = u$ を考える。S^2 上の点 $N(0,0,1)$ と xy 平面上の点 $(x,y,0)$ を結ぶ直線は N 以外のただ 1 つの点で S^2 と交わる。また、N と S^2 上の N 以外の点を結ぶ直線は xy 平面とただ 1 点で交わる。しがって xy 平面を複素平面と考えて $z = x + iy$ とすれば、S^2 から N を除いたものと複素数 z の間に 1 対 1 の対応を考えることができる。

   (a) N 以外の S^2 上の点 (s,t,u) と $z = x + iy$ が対応しているとき、(s,t,u) を z、$\bar{z}$ で表せ。

   (b) 複素平面上には N に対応する点がない。そこで N に対応するものとして仮想的な点を考え、これを無限遠点と呼び記号 ∞ で表す。このとき、複素平面に無限遠点を付け加えたものは S^2 と同一視でき、これを複素球面または Riemann 球面と呼ぶ。前問で $|z| \to \infty$ とすれば (s,t,u) は N に一致することを示せ。(変数が発散する状態を表す記号 ∞ と無限遠点を表す記号 ∞ とは異なる意味をもつことに注意。)

2. 複素数 z の指数関数を $e^z = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^n/n!$ で定義する。この級数は $|z| < \infty$ で絶対収束する。

   (a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ を示せ。

   (b) $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき、$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ となることを示せ。(実数の三角関数の級数展開を用いよ。)

3. 次のような複素数 z の関数を 1 次分数変換という。

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

   ただし、$f(\infty) = a/c$、$cz + d = 0$ のとき $f(z) = \infty$、$c = 0$ のとき $f(\infty) = \infty$ とする。1 次分数変換全体の集合を L と書くことにする。

   (a) $(f \cdot g)(z) = f(g(z))$ などと書くとき、$f, g \in L$ ならば $f \cdot g \in L$ であることを示せ。

   (b) f の逆変換 f^{-1} を求めよ。

   (c) 1 次分数変換は、$f(z) = az$(定数倍=拡大あるいは縮小と回転)、$f(z) = z + b$(平行移動)、$f(z) = 1/z$ の組み合せであることを示せ。

   (d) $f(z) = 1/z$ は円または直線を円または直線に写像することを示せ。(ヒント：複素平面の円または直線を $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$ と表すことができる。) 定数倍と平行移動についても同じことが簡単に示せるから、これは 1 次分数変換の性質である。

4. 複素数 z の三角関数を $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$、$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ で定義する。

   (a) Euler の公式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ を示せ。

   (b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ を示せ。

   (c) $\sin, \cos$ の加法定理を導け。

5. 複素数の範囲で 1 の n 乗根をすべて求めよ。また、1 以外の 1 の n 乗根を μ_k $(k = 1, \cdots n-1)$ として、$\Pi_{k=1}^{n-1}(1 - \mu_k) = n$ となることを示せ。