物理数学 1 演習 No.8 (00/6/9)

1. Liouville の定理を用いて、代数方程式 $f(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ $(n \geq 1,\ a_n \neq 0)$ が解を持つことを示せ。(結論を否定し、$1/f(z)$ に Liouville の定理を適用せよ。)

2. $f(z)$ は零点を持たない整関数であるとする。このとき、$g(z)$ を整関数として $f(z) = e^{g(z)}$ と書けることを示せ。($h(z) = \int_0^z f'(\zeta)/f(\zeta) d\zeta$ とおき、$f(z) = Ae^{h(z)}$ を導け。)

3. 領域 D で正則でかつ定数でない関数 $f(z)$ が、D の点 a に対して $f(a) = 0$ であるとする。このとき $z = a$ の近傍で $f(z) = (z-a)^n f_n(z)$ と書ける。ただし n は自然数、$f_n(z)$ はこの近傍で正則で $f_n(a) \neq 0$ である。($z = a$ を $f(z)$ の n 位の零点という。) $f_n(a) = f^{(n)}(a)/n!$ であることを示せ。

4. $\{z_k\}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を領域 D 内の互いに異なる点からなる無限点列とし、D の点 z_0 に収束しているものとする。

   (a) $f(z)$ が D で正則で $f(z_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ ならば $f(z) \equiv 0$ であることを示せ。(結論を否定し、z_0 の近傍で 3 のように $f(z)$ を書き、$f_n(z)$ の連続性を用いて矛盾を導け。)

   (b) $f(z_k) = g(z_k)$ ならば、D 全体で $f(z) = g(z)$ であることを示せ。これを一致の定理という。(注：D 内の曲線や部分領域で $f(z)$ と $g(z)$ が一致すれば、その曲線や部分領域上に収束する点列がとれるから D 全体で $f(z)$ と $g(z)$ が一致する。)

5. 閉領域 D で $f(z)$ が正則とする。

   (a) Cauchy の積分表示と一致の定理を用いて、D の内部の点で $|f(z)|$ が最大値をとると仮定すると D で $f(z)$ が定数となることを示せ。このことから、$|f(z)|$ は D の境界上でその最大値をとることがわかる。

   (b) D で $f(z) \neq 0$ ならば、$|f(z)|$ は D の境界上で最小値をとることを示せ。($1/f(z)$ を考えよ。)

   (c) 5b を用いて、代数方程式が解を持つことを示せ。