物理数学 1 演習 No.5 (00/5/19)

1. 関数 $w = e^z + z$ について考える。

   (a) 無限直線 $y = \pm\pi$ はこの関数で半無限直線に写されることを示せ。

   (b) 無限直線 $y = \pm\pi$ を無限に広がった平行板コンデンサーと考え、上の結果を使って (半無限) 平行板コンデンサーの端の付近での等電位線を描け。

   (c) 2 枚の極板の中間 $(v = 0)$ での電場を求めよ。

2. 積分路 $C$ を中心 $a$、半径 $r(> 0)$ の円とするとき次の積分を求めよ。

$$\oint_C (z-a)^n dz$$

   ($z = a + re^{i\theta}$ と置き、$\theta$ について積分せよ。)

3. Stokes の定理を使って Cauchy の積分定理を証明しよう。

   (a) Stokes の定理

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}$$

   で、閉曲線 $C$(およびそれに囲まれる面 $S$) を $x - y$ 平面にとる。このとき上式は、

$$\oint_C (V_x dx + V_y dy) = \int_S \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx\, dy$$

   となることを示せ。

   (b) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とし、$dz = dx + idy$ を使って $\oint_C f(z)dz$ を実部と虚部に分けよ。

   (c) 上の結果を用いて、$f(z)$ が $C$ および $C$ の内部で微分可能であるとき、Cauchy の積分定理

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

   を示せ。(注：ここでは Stokes の定理を用いたから、$u, v$ はその偏微分が連続であることが要求される。しかし、この条件がなくとも Cauchy の積分定理を証明することができる。)

4. $f(z)$ が単連結な領域 D で正則であるとき、積分 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ が積分路に依らないことを示せ。(このとき $F(z) = \int^z f(z)dz$ とすれば、$F'(z) = f(z)$ となる。)

5. 点 $O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)$ を直線で結ぶ正方形の積分路 $OABCO$ を考え、実際に積分を実行することにより

$$\oint z dz = 0\,, \qquad \oint \bar{z} dz \neq 0$$

   であることを確かめよ。

6. 閉曲線 $C_1$ の内部に閉曲線 $C_2$ があり、$C_1$ と $C_2$ に狭まれる環状の閉領域で $f(z)$ が正則ならば、

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

   であることを示せ。