物理数学 1 演習 No.4 (00/5/12)

1. 極座標を用いて $f(re^{i\theta}) = R(r,\theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$ と書くとき、R, Θ についての Cauchy-Riemann の条件を導け。

2. $w = f(z)$ が z_0 で微分可能で $f'(z_0) \neq 0$ であるとする。z_0 で接線をもつ 2 つの曲線 $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $z_0 = z_1(0) = z_2(0)$ を考える。これらの曲線が z_0 でなす角とそれらの $f(z)$ による像曲線が $w_0 = f(z_0)$ でなす角が等しいことを示せ。(これを、$f(z)$ は z_0 で等角である、という。)

3. $w = u + iv = z^2$ $(z = x + iy)$ について考える。

   (a) w 平面 (u–v 平面) の直線 $u = a$ および $v = b$ は z 平面 (x–y 平面) ではどのような曲線になっているか調べよ。(図も書くこと。)

   (b) 上の 2 直線について等角性確かめよ。

4. 前問と同様のことを $w = \log z$ について行なえ。

5. $w = f(z)$ は (ある領域で) 正則であるとする。w 平面で $\Phi(u,v)$ が Laplace 方程式を満しているとき、$\phi(x,y) = \Phi(u(x,y), v(x,y))$ が z 平面で Laplace 方程式を満すことを示せ。

6. 無限に長い半径 a, b $(0 < a < b)$ の 2 つの同軸導体円筒を考える。中心軸に垂直な断面を x–y 平面とし、中心軸は x–y 平面の原点を通っているものとしよう。すなわち、同軸導体円筒の x–y 平面での断面は原点を中心とする同心円になっている。内側の円筒を接地し外側の円筒の電位を ϕ_0 としたときの、2 つの円筒間の任意の点での電位を求めたい。2 つの円筒間には電荷は存在しないから電位 $\phi(x,y)$ は Laplace 方程式 $\Delta\phi = 0$ を満す。

   (a) $z = x + iy$ として、$w = u + iv = \log z$ により上の x–y 平面の同心円は u–v 平面上にどのように写されるか。

   (b) u–v 平面で Laplace 方程式を解き、2 つの導体間の任意の点での電位 $\Phi(u,v)$ を求めよ。

   (c) 5 の結果を用いて x–y 平面での電位 $\phi(x,y)$ を求めよ。