物理数学 1 演習 No.13 (00/7/14)

1. $\cot z$ を部分分数に分割することを考える。

   (a) $\cot z$ のすべての極の位置、位数、留数を求めよ。

   (b) $x = \pm R,\ y = \pm R\,(R = n\pi + \pi/2)$ で囲まれた正方形の周を C とする。

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cot z}{z-\zeta}\,dz = \cot\zeta + \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{k\pi-\zeta}$$

   であることを示せ。ただし、$\zeta \neq k\pi,\ |\zeta| < R$ とする。

   (c) $n \to \infty$ で上式の左辺の積分が 0 になることを示せ。ヒント：

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z(z-\zeta)}$$

   (d)

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}$$

   を示せ。

2. 前問の結果と

$$\frac{d}{dz}\log\frac{\sin z}{z} = \cot z - \frac{1}{z}$$

   を用いて

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

   を示せ。

3. $f(z)$ は領域 D で有理型で D の境界で零点も極も持たないとする。

   (a) $z = a$ が $f(z)$ の n 位の零点であるならば、$z = a$ は $f'(z)/f(z)$ の 1 位の極でその留数は n であることを示せ。

   (b) $z = a$ が $f(z)$ の n 位の極であるならば、$z = a$ は $f'(z)/f(z)$ の 1 位の極でその留数は $-n$ であることを示せ。

   (c) ∂D を D の境界とすると、

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_\infty$$

   であることを示せ。ただし、$N_{0(\infty)}$ は $f(z)$ の D 内の零点 (極) の数を表し、n 位の零点 (極) は n 個と数えるものとする。

   (d) ∂D に沿って 1 周したときの $f(z)$ の位相の変化を $\Delta_{\partial D}\arg f(z)$ と書くことにすると、$\Delta_{\partial D}\arg f(z) = 2\pi(N_0 - N_\infty)$ であることを示せ。

4. $f(z), g(z)$ は領域 D で正則で、∂D 上で $|f(z)| > |g(z)|$ であるとする。このとき、D 内での $f(z) + g(z)$ の零点の個数と $f(z)$ の零点の個数は等しいことを示せ。これを Rouché の定理という。($\arg\{f(z)+g(z)\} = \arg f(z) + \arg\{1 + g(z)/f(z)\}$ で $\Delta_{\partial D}\arg\{1 + g(z)/f(z)\} = 0$ を示し、前問の結果を用いよ。)