物理数学 1 演習 No.11 (00/6/30)

1. 留数定理を用いて次の積分を求めよ。($z = e^{i\theta}$ と置いて、単位円上の積分に帰着させよ。)

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta}$$

ただし、a, b は実数で、$a > |b|$ とする。

(b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2}$$

ただし、$|t| \neq 1$ とする。

(c)

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \; d\theta$$

ただし、n は正の整数。

(d)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$$

ただし、$b > a > 0$ とする。

(e)

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}\, d\theta$$

2. 留数定理を用いて次の積分を求めよ。(実軸と上半面の半円からなる積分路を考えよ。)

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

ただし、$a, b > 0$ とする。

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx$$

ただし、$a > 0$ とする。

3. 階段関数

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

が次のように積分で表されることを示せ。

$$\theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx$$

ただし、P は Cauchy の主値を表す。($t > 0$ のときは、No.6 の問題 1 とほとんど同様にできる。$t < 0$ のときは、積分路を下半面にとればよい。)