物理数学 1 演習 No.10 (00/6/23)

1. $f(z) = e^{1/z}$ とする。

   (a) $f(z)$ の $z = 0$ での Laurent 展開を求めよ。

   (b) この展開の成り立つ範囲を求めよ。

   (c) $z = 0$ はいかなる特異点か。

   (d) 任意の定数 $c \neq 0$ について、方程式 $e^{1/z} = c$ は $z = 0$ の近傍に無限個の解を持つことを示せ。(一般に a を真性特異点とすれば、$\lim_{z\to a} f(z)$ は不確定となり、極限のとり方により任意の値をとることができる。)

2. $z = \infty$ での関数 $f(z)$ の性質は $g(z) = f(1/z)$ の $z = 0$ での性質により決定される。z^n (n は自然数)、e^z、$\sin z$ について $z = \infty$ がいかなる特異点か調べよ。

3. $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ で $f_1(z)$、$f_2(z)$ は正則であるとする。$f_2(a) = 0$、$f_2'(a) \neq 0$、$f_1(a) \neq 0$ とすると、$f(z)$ の Laurent 展開の係数について $a_{-1} = f_1(a)/f_2'(a)$ が成り立つことを示せ。

4. $f(z)$ は $0 < |z - a| < r$ で正則とする。$0 < \rho < r$ として $z = a$ における $f(z)$ の留数 (residue) を

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz$$

   で定義する。(この値は ρ に無関係である。)

   $f(z)$ の Laurent 展開を $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$ として、$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = a_{-1}$ であることを示せ。

5. $f(z)$ は $z = a$ で極を持つとする。

   (a) $z = a$ が 1 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z - a) f(z)$$

   であることを示せ。

   (b) $z = a$ が 2 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{d}{dz} \{(z - a)^2 f(z)\}$$

   であることを示せ。

   (c) $z = a$ が n 位の極のとき、

$$\mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - a)^n f(z)\}$$

   であることを示せ。

6. $f(z) = (z^2 + z + 1)z^{-2}(z - 1)^{-1}$ の特異点とその留数を求めよ。

7. $f(z) = z^2 e^{1/z}$ の $z = 0$ での留数を求めよ。