相対論的量子力学／場の理論序説

佐藤亮介

2022 年 4 月 26 日

2022 年前期の相対論的量子力学／場の理論序説の講義ノートです。誤植や間違いなど見つけた場合は rsato@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp までお願いいたします。講義に関する情報は http://kabuto.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~rsato/ に随時掲載予定です。以下、参考文献です。

- 相対論的量子力学（西島和彦、培風館）
- スピンはめぐる（朝永振一郎、みすず書房）
- 演習　場の量子論（柏太郎、SGC books）
- 場の量子論: 不変性と自由場を中心にして（坂本眞人、裳華房）
- 場の量子論 (II)-ファインマン・グラフとくりこみを中心にして（坂本眞人、裳華房）

目 次

0 なぜ相対論的量子力学か

これまでの物理学科の講義で、

- 原子を始めとするミクロな世界では、古典力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、量子力学を使う必要があること

- 光の速さに近い速度があらわれる状況では、ニュートン力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、特殊相対論を使う必要があること

の 2 つを学んだ。すると、**ミクロな世界で光に近い速度が出てきたらどうなるか、すなわち、特殊相対論と量子力学を同時に使うことはあるだろうか**、というのが自然な疑問として浮かび上がるのではないだろうか。例えば、電子と電子が光の速さに近い速度で衝突したらどうなるか、どのように計算すればよいだろう。この問に答えるための基礎を身につけるのがこの講義の目的である。最終的には場の量子論を学ぶ必要がある。この講義では、そこに至るまでの入門編として、

- ディラック方程式

- 自由スカラー場の量子論

の 2 つを学ぶ。ディラック方程式はある意味で相対論版のシュレーディンガー方程式とみなすことができ、スピンという概念が自然にあらわれるなど面白い性質がある。自由スカラー場の量子論は、場の量子論の中で一番簡単な例である。自由スカラー場の量子化を通して、場の量子論の基本を学ぼう。

1 復習と準備

相対論的量子力学を学ぶために必要な知識を簡単に復習しつつ準備しよう。

1.1 自然単位系

量子力学の計算にはプランク定数（もしくはディラック定数）$\hbar$、特殊相対論の計算には光の速度 c が大事だった。[1]

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-25}\ \mathrm{GeV} \cdot \mathrm{s}, \tag{1.1}$$

$$c = 2.99 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}. \tag{1.2}$$

相対論的量子力学をやると、いろんなところに $\hbar$ と c が出てきてすごく面倒。思い切って $\hbar = c = 1$ という単位系を採用してしまおう。これまでは [質量]、[長さ]、[時間] の 3 つの次元があったが、$\hbar = 1$ と $c = 1$ を採用したせいで、3 つの次元に

$$[\text{質量}] = \frac{1}{[\text{長さ}]} = \frac{1}{[\text{時間}]} \tag{1.3}$$

という関係がつく。例えば、$c = 1$ を使うと、

$$1\ \mathrm{s} = 2.99 \times 10^{8}\ \mathrm{m} \tag{1.4}$$

例えば、$\hbar = 1$ を使うと、

$$1\ \mathrm{s}^{-1} = 6.58 \times 10^{-25}\ \mathrm{GeV} \tag{1.5}$$

などである。自然単位系を採用したことにより、次元を持つ量が [質量] の何乗かで数えられるようになる。これを質量次元 (mass dimension) と呼ぶ。質量は質量次元 1、長さは質量次元 -1、時間は質量次元 -1、速度は質量次元 0。また、

$$\hbar c = 0.197\ \mathrm{GeV\ fm}. \tag{1.6}$$

という公式を憶えておくと便利。[2]

特に、エネルギーは質量次元 1。自然単位系を導入する前は、粒子の静止エネルギーを $E = mc^2$ と書いていたが、自然単位系を導入すると、$E = m$ とかける。粒子の質量を keV、MeV、GeV といったエネルギーの単位で書くのがならわし。例えば、

$$m_{\text{電子}} = 511\ \mathrm{keV}, \tag{1.7}$$

$$m_{\text{陽子}} = 938\ \mathrm{MeV}, \tag{1.8}$$

$$m_{\text{ヒッグス粒子}} = 125\ \mathrm{GeV}. \tag{1.9}$$

などなど。他の例は、Particle Data Group(`https://pdglive.lbl.gov/`) とか、Wikipedia(`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles`) をみてみよう。

---

[1] 1 GeV $= 10^9$ eV であり、1 eV $= 1.60 \times 10^{-19}$ J。1 eV は、素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C が 1 V の電位差で得るエネルギーで、1 eV $=$ 1 C $\times$ 1 V。

[2] 忘れた時は google で「hbar * c in GeV * fm」と検索すると、「0.197326979 GeV * fm」という結果が返ってくる。この例に限らず google の単位換算機能はすごく便利。

1.2 特殊相対論

時間と空間の座標をまとめてベクトルとして書こう。

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$。（自然単位系を採用しているので長さと時間が同じ次元を持つようになった。自然単位系のご利益！）

時空のメトリック（計量）は

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.11}$$

まとめて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.12}$$

と書く。ここで、

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu=0,1,2,3} \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.13}$$

であり、アインシュタインの縮約とよばれる。$g_{\mu\nu}$ は行列として書くと、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

（教科書によっては $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ のメトリックを採用していることもあるので注意。[3]）

異なる座標の間のローレンツ変換は、

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu. \tag{1.15}$$

と書ける。さて、ds^2 は座標系に依らない。すなわち $g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ であることから、

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \tag{1.16}$$

Λ^μ_α はこの性質を満たすものである。

具体的な例として、z 軸方向のブーストを行うようなローレンツ変換をあらわにかいてみよう。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & & \gamma\beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \gamma\beta & & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

[3] 矛盾なく使えばどちらのメトリックでもいいのだが、人（と分野？）によって好みはある。[1] の footnote 2 なども参照。場の量子論の教科書なら、Weinberg と Srednicki は $(-1, 1, 1, 1)$。Peskin-Schroeder、九後は $(1, -1, -1, -1)$。

ここで、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.18}$$

である。ラピディティη を使って、

$$\gamma = \cosh\eta, \qquad \gamma\beta = \sinh\eta. \tag{1.19}$$

と書くこともできる。

また、空間の回転

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

もローレンツ変換の一部。ローレンツ変換は回転のある種の一般化と思うこともできる。

エネルギーと運動量も同じ次元になったので、4 元運動量ベクトルの変換則も簡単に書ける。$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)^T$ について $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ であるから、成分についてバラすと、

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & & \gamma\beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \gamma\beta & & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

静止質量 m は、運動量ベクトルから作ったローレンツ不変なスカラー量としてあらわれることを思い出そう。これは静止系の計算と比較すれば明らか。

$$m^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = E^2 - \vec{p}^2. \tag{1.22}$$

$\vec{p} = \vec{0}$ とおいて、$E > 0$ とすれば、$E = m$ となるので、m が静止質量エネルギーであることも分かる。

1.3 （非相対論的）量子力学

量子力学では、波動関数 ψ を使い、$|\psi|^2$ を粒子をその場所に見出す確率の密度と解釈することができた。ψ の時間発展はシュレーディンガー（Schrödinger）方程式で記述できる。

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi. \tag{1.23}$$

H はハミルトニアンであり、古典的なハミルトニアン $H(p, x)$ が得られると、

$$H = H\left(p = -i\frac{\partial}{\partial x}, x\right) \tag{1.24}$$

という p を $-i(\partial/\partial x)$ に置き換えるような操作で得られた。とくに、$H = p^2/2m + V(x)$ のとき、シュレーディンガー方程式のハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + V \tag{1.25}$$

シュレーディンガー方程式をみると、左辺には時間の一階微分。右辺には空間の二階微分。ローレンツ変換は時間と空間を線形に混ぜる。シュレーディンガー方程式では時間と空間は対等ではなく、ローレンツ対称性のもとで良い性質を持っていない。

確率密度 ρ は、

$$\rho = |\psi|^2 \tag{1.26}$$

と定義される。規格化された波動関数を用いると、

$$\int d^3x\rho = \int d^3x|\psi|^2 = 1 \tag{1.27}$$

である。確率密度の時間発展は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 =& \frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi \\ =& \left(\frac{i}{2m}\nabla^2\psi\right)\psi^* - \left(\frac{i}{2m}\nabla^2\psi^*\right)\psi \\ =& \vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{i}{2m}\vec{\nabla}\psi\right)\psi^* - \left(\frac{i}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\right)\psi\right]\end{aligned} \tag{1.28}$$

と計算される。ベクトル $\vec{j}$ を

$$\vec{j} \equiv \frac{i}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*)\psi - \frac{i}{2m}(\vec{\nabla}\psi)\psi^*. \tag{1.29}$$

と定義すると、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0. \tag{1.30}$$

と綺麗に書くことができる。$\vec{j}$ は確率密度の流れを記述するベクトルと解釈できる。この方程式により、確率が各点各点で勝手に湧き出したり吸い込まれたりすることがなく、確率が全体として保存していることが分かる。

2　クラインゴルドン（Klein-Gordon）方程式

正準量子化における演算子の置き換えルールを思い出してみよう。

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{2.1}$$

というハミルトニアン H が与えられた時、

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to -i\vec{\nabla} \tag{2.2}$$

という置き換えを採用すると、シュレーディンガー方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi. \tag{2.3}$$

がえられたのだった。（自然単位系 $\hbar = c = 1$ をとってしまったことに注意！）

$\cdots$ということは $E^2 = m^2 + p^2$ にこの置き換えルールを適用して、

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (m^2 - \nabla^2)\psi \tag{2.4}$$

とすれば良いのでは？この方程式はクラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれる。

2.1 クラインゴルドン方程式の平面波解

クラインゴルドン方程式 (2.4) の平面波解がどんなものか見てみよう。

$$\psi = \exp\left(iEt - ip_x x - ip_y y - ip_z z\right). \tag{2.5}$$

と試しにおいてみよう。E, p_x, p_y, p_z はクラインゴルドン方程式 (2.4) が満たされるように、このあと選べばよい。さっそく、クラインゴルドン方程式 (2.4) にこの解を代入すると、

$$E^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{2.6}$$

を得る。p_x, p_y, p_z の値を固定したとき、E の解は次の 2 つ。

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, \qquad -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \tag{2.7}$$

エネルギーが正の解にくわえて、 負となる解もある！（あとで分かるように負エネルギー解の存在は、反粒子の存在と関係している）

2.2 確率解釈できるか？

クラインゴルドン方程式に従う ψ は確率解釈できるだろうか？確率が保存しているならば、 確率密度 ρ とその流速 $\vec{v}$ が存在して、非相対論的量子力学と同様に次のような確率保存の式を満たす。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \tag{2.8}$$

さて、おもむろに、ψ を使って ρ と $\vec{j}$ を次のように定義してみよう。

$$\rho = \frac{i}{2m}[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}], \tag{2.9}$$

$$\vec{j} = \frac{i}{2m}[(\vec{\nabla}\psi^*)\psi - \psi^*(\vec{\nabla}\psi)]. \tag{2.10}$$

この ρ と $\vec{j}$ は確率保存の式をみたすことが、クラインゴルドン方程式を使ってチェックできる。計算してみよう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} =& \frac{i}{2m}[\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2}\psi - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}] \\ =& \left(\frac{i}{2m}\nabla^2\psi\right)\psi^* - \left(\frac{i}{2m}\nabla^2\psi^*\right)\psi \\ =& \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{i}{2m}\vec{\nabla}\psi\right)\psi^* - \left(\frac{i}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\right)\psi\right]\end{aligned} \tag{2.11}$$

確かに式 (2.8) が満たされている。

一見良さそうだが、この ρ は、非相対論的な場合 (1.26) と異なり、$\rho \geq 0$ が保証されていない。（positive-definite ではない、とも言う。）つまり、負になってしまうこともありうる。具体的には $\psi = e^{-iEt}$ みたいな解を考えて E が負だと ρ も負になってしまう。確率が負になってしまったらおかしい。確率密度と解釈するのはなんか無理そう…。

3 ディラック (Dirac) 方程式

シュレーディンガー方程式を手直しして次のような条件を満たすようにしたい。

- ローレンツ対称性を保つ。
- 確率解釈ができる波動関数 ψ がある。（クラインゴルドン方程式の場合と違って、非負になることが保証されているような定義の確率密度がほしい。）

前の章では波動関数は一成分としていたが、一般化して n 成分あってもいい。この場合、固有値が全ての正である $n \times n$ エルミート行列 A を使って

$$\rho = \psi^\dagger A \psi. \tag{3.1}$$

と書けたら $\rho \geq 0$ が保証できそうだ。ここで ψ は成分を n 個並べたもの。ためしに A を単位行列にしてみよう。[4]そうすると、

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} |\psi_i|^2 \tag{3.2}$$

と書ける。このとき、ρ の時間微分は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_i^* \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \psi_i \frac{\partial \psi_i^*}{\partial t} \right). \tag{3.3}$$

右辺が、なんらかのベクトル $\vec{j}$ を使って、$\vec{\nabla}\vec{j}$ という形になってほしい。ψ は時間についての一階微分方程式を満たしてもらうのがよさそう。きっとこんな形になるはずだ。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \tag{3.4}$$

$\hat{H}$ は空間の一階微分を含む演算子。（一見、シュレーディンガー方程式とほぼ一緒の形だが、$\hat{H}$ は一階微分しか含まないから、$H = p^2/2m$ とは違うもの。）さらに、$E^2 = m^2 + p^2$ の量子論バージョンとして、

$$\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2 \tag{3.5}$$

という関係が成り立ってほしい…。

まとめると、

- $\rho = \psi^\dagger \psi$
- $i \dfrac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$
- $\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2$

を満たしてほしい。

---

[4]単位行列じゃない場合も ψ を適当に再定義すれば、単位行列にとりなおすことができる。

3.1 $\hat{H}$ を行列にすれば上手くいきそう

特殊相対論では時間と空間はほとんど同等の立場。ということは、H はきっと空間の一階微分を含むだろう。しかし、適当に

$$\hat{H} = m + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}??? \tag{3.6}$$

とかやってしまうと、

$$\hat{H}^2 = m^2 + 2m\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2??? \tag{3.7}$$

みたいな感じになり、どう見ても上手くいっていない。どうしたらいいだろうか？

ディラックは H を行列にした。$n \times n$ の行列 β, α_x, α_y, α_z を使って

$$\hat{H} = m\beta + i\partial_x\alpha_x + i\partial_y\alpha_y + i\partial_z\alpha_z \tag{3.8}$$

と書いてみよう。そうすると、みたすべき式 (3.5) は

$$\hat{H}^2 = (m^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2)I \tag{3.9}$$

と書ける。I は $n \times n$ の単位行列。ここに式 (3.8) の H を代入してみよう。以下のような行列の間の関係式があれば、式 (3.9) は満たされる。

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I, \tag{3.10}$$

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0, \tag{3.11}$$

$$\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = 0, \tag{3.12}$$

$$\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = 0, \tag{3.13}$$

$$\alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0, \tag{3.14}$$

$$\alpha_y\beta + \beta\alpha_y = 0, \tag{3.15}$$

$$\alpha_z\beta + \beta\alpha_z = 0. \tag{3.16}$$

これを満たす解を見つければ、欲しい方程式が手に入るはずだ。

3.2 β, α_x, α_y, α_z の解

式 (3.14) の両辺左側から α_x を掛けてみよう。

$$\alpha_x^2\beta + \alpha_x\beta\alpha_x = 0. \tag{3.17}$$

次に上の式の両辺のトレースをとり、さらに $\alpha_x^2 = I$ を使って整理すると、

$$\mathrm{tr}\beta = 0. \tag{3.18}$$

$\mathrm{tr}\alpha_x = 0$, $\mathrm{tr}\alpha_y = 0$, $\mathrm{tr}\alpha_z = 0$ も同様に示せる。[5] $\beta^2 = I$ かつ $\mathrm{tr}\beta = 0$ であることから、β は固有値 $+1$ が n 個、-1 が n 個の、$2n \times 2n$ 行列であることが分かる。$n = 1(2 \times 2$ 行列) では、式 (3.10) から式 (3.16) の全

[5] 時間のある人は示してみてください

てを満たすような β, α_x, α_y, α_z の組を上手く見つけられない。[6]ということで、$n = 2(4 \times 4$ 行列) を考えてみよう。β を対角化して次の形にとる基底で考えてみる。

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

そうすると、次のような $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を取れば解になっていることが分かる。

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix}, \qquad \alpha_y = \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix}, \qquad \alpha_z = \begin{pmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

ここで、$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ (Pauli) 行列。以下で定義される。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

パウリ行列は

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2, \tag{3.22}$$

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0, \tag{3.23}$$

$$\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0, \tag{3.24}$$

$$\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0. \tag{3.25}$$

を満たす。まとめて

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I_2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.26}$$

とも書かれる。

例えば、式 (3.14) をチェックしてみよう。

$$\begin{aligned}\alpha_x\beta + \beta\alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -\sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ -\sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.27}$$

また、式 (3.11) もチェックできる。

$$\begin{aligned}\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma_z & \\ & i\sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma_z & \\ & -i\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.28}$$

[6]時間のある人は示してみてください

同様に、式 (3.15)、式 (3.16)、式 (3.12)、式 (3.13) も確かめることができる。[7]

まとめると、次のような方程式が得られた。

ディラック (Dirac) 方程式

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha_x\partial_x - i\alpha_y\partial_y - i\alpha_z\partial_z + m\beta)\psi \tag{3.29}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

ψ は 4 成分。これがディラック (Dirac) 方程式だ。ちなみにディラックによる原論文は [2].

3.3 後々のためディラック方程式ちょっと書き直す

式 (3.29) のままでは、ローレンツ対称性の議論がちょっとやりにくい。空間微分のところには行列が掛かっているのに、時間微分のところには行列が掛かっていない（単位行列が掛かっている）ので、なんとなく時間と空間が対等に扱えているかどうかが見づらい。

この点はちょっとした手直しで改善できる。式 (3.29) の両辺に左から β をかけると、

$$(i\beta\partial_t + i\alpha_x\partial_x + i\alpha_y\partial_y + i\alpha_z\partial_z)\psi = m\psi \tag{3.31}$$

と書ける。

次のような行列 $\gamma^0,\ \gamma^1,\ \gamma^2,\ \gamma^3$ を定義してみよう。

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

$$\gamma^i \equiv \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.33}$$

この行列はガンマ行列、あるいは、ディラック行列などと呼ばれる。このガンマ行列を使うと、アインシュタインの縮約を上手く使えるようになり、ディラック方程式は以下のように書ける。

ディラック (Dirac) 方程式

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \tag{3.34}$$

また、式 (3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16) とガンマ行列の定義を使うと、ガンマ行列の反交換関係は、

$$\gamma^0\gamma^0 = \beta^2 = I_4, \tag{3.35}$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \beta^2\alpha_i + \beta\alpha_i\beta = \alpha_i - \alpha_i = 0, \tag{3.36}$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = -2\delta_{ij}. \tag{3.37}$$

[7] 時間のある人は示してみてください

この関係式は、メトリックを使ってまとめることができる。

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{3.38}$$

簡潔に書けるようになっていい感じ。

3.4 他にも β、α_i の解はある

この α_x, α_y, α_z, β は解のひとつ。適当なユニタリ行列 U を使って、

$$\alpha'_{x,y,z} = U\alpha_{x,y,z}U^\dagger, \qquad \beta' = U\beta U^\dagger. \tag{3.39}$$

と定義しても $\alpha'_{x,y,z}$ と β' は同様の関係式を満たす。

例えば、

$$\beta' = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \alpha'_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

というのも別解になっている。

これを使うと、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

教科書によって違う定義を使っていたりするので注意が必要。

3.5 連続の方程式をチェックしよう

せっかくディラック方程式が導出できたので、連続の方程式を満たすことを確認しよう。$\rho = \psi^\dagger\psi$ であることから、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) &= \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi + \psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} \\
&= -i\psi^\dagger(-i\alpha_x\partial_x\psi - i\alpha_x\partial_y\psi - i\alpha_x\partial_z\psi + m\beta\psi) + (i\partial_x\psi^\dagger\alpha_x + i\partial_y\psi^\dagger\alpha_y + i\partial_z\psi^\dagger\alpha_z + m\psi^\dagger\beta)\psi \\
&= -\partial_x(\psi^\dagger\alpha_x\psi) - \partial_y(\psi^\dagger\alpha_y\psi) - \partial_z(\psi^\dagger\alpha_z\psi)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ということで、

$$\vec{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi \tag{3.43}$$

と定義すれば、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0. \tag{3.44}$$

が成り立つ。連続の式が成り立っている。うれしい！

3.6　ディラック方程式の平面波解

ディラック方程式の解にはどんなものがあるのだろうか。平面波解を求めてみよう。z 軸方向に運動量を持つと仮定して、次のような形を考えてみる。

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \exp\left(ip_z z - iEt\right). \tag{3.45}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 は、ディラック方程式を満たすように決める必要がある。上の形をディラック方程式 (3.29) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -E+m & & p_z & \\ & -E+m & & -p_z \\ p_z & & -E-m & \\ & -p_z & & -E-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.46}$$

がえられる。上の形をディラック方程式 (3.34) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} E-m & & -p_z & \\ & E-m & & p_z \\ p_z & & -E-m & \\ & -p_z & & -E-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.47}$$

がえられる。$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ はいつでも解になるけど、当然そうじゃない解が欲しい！そのためには左辺にかかってる 4×4 行列の行列式が 0 にならないといけない。行列式は、

$$(E^2 - m^2 - p_z^2)^2 \tag{3.48}$$

なので、

$$E^2 - m^2 - p_z^2 = 0. \tag{3.49}$$

を満たす必要がある。これを E についてとくと、

$$E = \pm\sqrt{m^2 + p_z^2}. \tag{3.50}$$

エネルギーが正になる解と負になる解の二種類がある！

まず、正のエネルギー解 ($E = +\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$p_z u_1 - (E+m)u_3 = 0, \tag{3.51}$$

$$-p_z u_2 - (E+m)u_4 = 0 \tag{3.52}$$

を解くと、

$$\psi = \left[u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/(E+m) \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -p_z/(E+m) \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \tag{3.53}$$

u_1 と u_2 は好きな値にとれるので、独立な解が 2 つある！

運動量がエネルギーに比べて小さい極限、$p_z \ll E$ を考えてみよう。このとき、$E = \sqrt{m^2 + p_z^2}$ なので、$E \sim m$ かつ、$p_z \ll m$。運動エネルギーが静止質量エネルギーと比較して無視できる。

$$\frac{p_z^2}{2m} \ll m \tag{3.54}$$

こういう極限は、「非相対論的な極限」と呼ばれる。これまでに習った量子力学に近づいていく極限。この極限で、

$$\psi \simeq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp(ip_z z - iEt) \tag{3.55}$$

ということで、非相対論的極限でも 2 つの自由度は残る。これがスピンの自由度。なんでスピンと言えるのか詳しくは後でみる。

同様に、負のエネルギー解 ($E = -\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$-(|E| + m)u_1 - p_z u_3 = 0, \tag{3.56}$$

$$-(|E| + m)u_2 + p_z u_4 = 0 \tag{3.57}$$

今度は u_3, u_4 について解いてみよう。

$$\psi = \left[u_3 \begin{pmatrix} -p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \tag{3.58}$$

u_3 と u_4 は好きな値にとれるので、この場合も独立な解が 2 つある！

結局、同じ p_z の値に対して、正のエネルギー解は 2 つ、負のエネルギー解が 2 つ、の合計 4 つの解が現れた。それぞれ、どういった意味を持つか考えていこう。

3.7 ディラック (Dirac) の海、反粒子

エネルギーの低い準位があるとエネルギーを放出して遷移が起きる（例：水素原子の $n = 2$ から $n = 1$ への遷移に伴う Lyman α 線の放出、など)。負のエネルギー解があるので、そっちに遷移していってしまう？しかも、エネルギーに下限がない！電子が安定に存在できなくなるのではないか…。

Dirac はこの問題を次のように考えることで回避することを提案した。

- 「真空」では $E = -m$ から $-\infty$ までのすべての負エネルギー状態が完全に満員になっている。
- 真空状態の負エネルギー電子は、観測可能量に影響しない。真空からのズレのみが観測される。

フェルミオンには排他律があるので、同じ準位にはひとつの粒子しか入ることはできない。ひとつめの仮定により、正のエネルギーを持った粒子がエネルギーを放出して、負のエネルギーに落ち込むことはなくな

る。つまり、系が安定して存在できることになる。実際、負のエネルギー準位を占める電子がいた方がエネルギーが下げられるので、負のエネルギー準位が満員になっている状態は最もエネルギーの低い状態とみなせる。ということで、「真空」がこのようなものであると考えるのは自然だ。これは、Dirac の海 (Dirac sea)、と呼ばれている。

電子がひとつ いる状態は、正のエネルギー準位を占める粒子がひとつ いる状態。確かに真空に比べてエネルギーが増加している。負のエネルギー準位から粒子をひとつ抜いてみよう。空孔 (hole) ができる。この状態も真空よりエネルギーが高い。負電荷を持つ粒子が一ついなくなったので、真空に比べて電荷が $+1$ 増加した。これは電荷が正の粒子がひとつ いる状態と解釈できる。このようにディラック方程式を考えると電荷の値が正反対の粒子の存在が必然的に示唆される。このような粒子は反粒子と呼ばれる。電子に対応する反粒子は陽電子 (positron) と呼ばれる。

正のエネルギーを持つ電子が、エネルギーを放出して、負のエネルギー準位の空孔に落ち込んだ状況を考えてみよう。これは、電子と陽電子が消えてしまいエネルギーに変わった状況とみなせる。これは対消滅 (annihilation) とよばれる。逆に、外からエネルギーを与えて、負のエネルギー準位を埋めている電子を正のエネルギー準位に励起させてみよう。これは、エネルギーが電子と陽電子に変わったとみなすことができる。これを対生成 (pair creation) と呼ぶ。（この状況をきちんと記述するには、電子と光子などとの相互作用を入れる必要があるので、場の量子論が必要。）

[3]

3.8 積み残した疑問

まだ答えてない疑問が残っている。

- なぜ正エネルギーと負エネルギーの解がそれぞれ 2 つずつ？
- ローレンツ不変にちゃんとなってるの？

次の章で議論するよ！

4 ローレンツ変換とディラック方程式

前の章でディラック方程式を導入したが、この章ではローレンツ対称性とディラック方程式の関係を詳しく議論していく。結果、ディラック方程式にスピンという概念が自然に導入されることをみる。

4.1 方程式とローレンツ変換

どの座標系で見ても、物理法則が一緒。つまり、“同じ” 方程式が成立する。場や方程式がローレンツ変換に対してどのように振る舞うか、クラインゴルドン方程式とマックスウェル方程式を例に見る。そして、ディラック方程式についても議論する。前の章で出てきた 4 成分の ψ が、スカラーでもない、ベクトルでもない、テンソルでもない。スピノルであることを見る。

4.1.1　反変ベクトル、共変ベクトル、テンソル

x 座標から x' 座標へのローレンツ変換は以下のように定義された。

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{4.1}$$

ただし、

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \tag{4.2}$$

ローレンツ変換にしたがって、

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \tag{4.3}$$

と変換されるものを反変ベクトルと呼ぶ。反変ベクトルを 2 つもってきて、メトリックで足をつぶすと定義によりローレンツ不変。

$$g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu\nu} A'^{\mu} B'^{\nu} \tag{4.4}$$

メトリックで足をつぶしたら、添字を挙げたり下げたりしておくのが便利。

$$A_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} A^{\nu}, \qquad A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}. \tag{4.5}$$

ただし、

$$g^{\mu\nu} \equiv (g^{-1})_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{4.6}$$

下付き添字のベクトル A_{μ} は共変ベクトルと呼ばれる。添字の上付き下付きは、ローレンツ変換でどう変換されるかを明示する便利なルール。

共変ベクトルの変換則を求めてみよう。共変ベクトルと反変ベクトルの内積がローレンツ不変なことから、

$$\begin{aligned} A^{\mu} B_{\mu} &= A'^{\mu} B'_{\mu} \\ A^{\mu} B_{\mu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} B'_{\mu} \end{aligned} \tag{4.7}$$

なので、

$$B_{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} B'_{\mu}. \tag{4.8}$$

$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}$ の両辺に $g^{\lambda\alpha}$ かけてみる。

$$\delta^{\lambda}_{\alpha} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda_{\mu}{}^{\lambda} \tag{4.9}$$

なので、

$$\Lambda_{\mu}{}^{\lambda} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} \tag{4.10}$$

これを使うと、

$$\begin{aligned} B_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} &= B'_{\mu} \\ \Lambda_{\mu}{}^{\nu} B_{\nu} &= B'_{\mu} \end{aligned} \tag{4.11}$$

まとめると、上付き添字の反変ベクトルと、下付き添字の共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$A^{\mu} \quad \to \quad A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}, \tag{4.12}$$

$$B_{\mu} \quad \to \quad B'{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} B_{\nu}. \tag{4.13}$$

添字がたくさんあったら、こう！

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \qquad \to \qquad T'^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1}\cdots\Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m}\Lambda_{\nu_1}^{\beta_1}\cdots\Lambda_{\nu_m}^{\beta_n} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \tag{4.14}$$

添字が 2 つ以上あると、テンソル、と呼ばれるようになる。

これがローレンツ不変になる。

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} A^{\nu_1}\cdots A^{\nu_n} B_{\mu_1}\cdots B_{\mu_m} \tag{4.15}$$

微分演算子は共変ベクトルになる！

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{4.16}$$

ローレンツ変換から、確かに下付き添字にしておくのが正しいのを確認しておこう。微分の定義により、

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \partial'_{\mu} = \partial_{\nu} \tag{4.17}$$

なので、

$$\partial'_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \partial_{\nu} \tag{4.18}$$

逆行列かけて、

$$\partial'_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\lambda} = \partial_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\lambda} \tag{4.19}$$

ということで、

$$\partial'{}_{\lambda} = \Lambda_{\lambda}^{\nu}\partial_{\nu} \tag{4.20}$$

下付き添字にしといて OK なことが確認できた。

4.1.2 クラインゴルドン方程式

クラインゴルドン方程式がローレンツ変換でどう振る舞うか詳しくみてみよう。微分演算子もテンソルっぽく書けたので、クラインゴルドン方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi(x) = (\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 \tag{4.21}$$

といういい感じで書けるようになった。ここで $\partial^2 \equiv g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}$。

x' 座標で ϕ はどういう値になるだろう。よくわかんないけど、物理的に同じ点を見れば x 座標でみた時と同じ値になってる気がする………ので、いったん、

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \tag{4.22}$$

としてみよう。これを認めると、x' 座標でも、同じ形の方程式が成立することを見てみよう。

$$\begin{aligned}(g^{\mu\nu}\partial'_\mu\partial'_\nu - m^2)\phi'(x') &= (g^{\mu\nu}\Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta\partial_\alpha\partial_\beta - m^2)\phi(x) \\ &= (g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta - m^2)\phi(x) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.23}$$

確かに

$$({\partial'}^2 + m^2)\phi' = 0 \tag{4.24}$$

が成立する！x 座標でも x' 座標でも「物理法則が同じ」と言えそう。

4.1.3 マックスウェル (Maxwell) 方程式を特殊相対論ぽく書く

マックスウェル方程式を思い出してみよう。

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \tag{4.25}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{j}. \tag{4.26}$$

真空中の誘電率と透磁率は 1 に取った。式 (4.25) を満たすような電場と磁場は、スカラーポテンシャル $\phi(t,\vec{x})$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}(t,\vec{x})$ を導入することにより、（少なくとも局所的に）次のように書ける。

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{4.27}$$

ρ と $\vec{j}$ を ϕ と $\vec{A}$ で書いてみよう。

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \rho, \tag{4.28}$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \vec{j}. \tag{4.29}$$

$\nabla\times(\nabla\times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla A)$ を使った。もうちょっと整理すると、

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \rho, \tag{4.30}$$

$$-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \vec{j}. \tag{4.31}$$

4 元電流ベクトルを定義しよう。

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}). \tag{4.32}$$

式 (4.30) と式 (4.31) の右辺は四元ベクトルの成分なので、ϕ と $\vec{A}$ から、

$$A^\mu = (\phi, -\vec{A}). \tag{4.33}$$

という四元ベクトルが定義できそうだ。式 (4.30) と式 (4.31) は一本にまとめられる。

$$-\partial^2 A^\mu + \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\nu \tag{4.34}$$

実は電場と磁場は

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.35}$$

の成分であることが分かる。計算してみると、

$$F^{01} = -\dot{A}_x + \partial_x \phi = E_x, \tag{4.36}$$
$$F^{02} = -\dot{A}_y + \partial_y \phi = E_y, \tag{4.37}$$
$$F^{03} = -\dot{A}_z + \partial_z \phi = E_z, \tag{4.38}$$
$$F^{12} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z, \tag{4.39}$$
$$F^{23} = \partial_y A_z - \partial_z A_y = B_x, \tag{4.40}$$
$$F^{31} = \partial_z A_x - \partial_x A_z = B_y \tag{4.41}$$

マックスウェル方程式もあらわにチェックできる。

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = -\rho, \tag{4.42}$$
$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -j^1, \tag{4.43}$$
$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} = -j^2, \tag{4.44}$$
$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} = -j^3 \tag{4.45}$$

ということで、式 (4.26) は次のようにまとめられる。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu. \tag{4.46}$$

また、式 (4.25) を次のように書き直すこともできる。

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \tag{4.47}$$

4 元ベクトルポテンシャルのローレンツ変換は、

$$A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \tag{4.48}$$

電磁場のローレンツ変換は、

$$F_{\mu\nu}(x) \to F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}(x) \tag{4.49}$$

x 座標では

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu, \qquad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \tag{4.50}$$

が成立していた。x' 座標では、

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = -j'^\nu, \qquad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial'_\mu F'{}_{\nu\lambda} = 0. \tag{4.51}$$

が成立する！

4.1.4　ディラック方程式はどう？

ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ を考えた時、x' 座標でも、ディラック方程式 (3.34) が成立してほしい：

$$(i\partial'_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi'(x') = 0. \tag{4.52}$$

スカラー場の場合は $\phi'(x') = \phi(x)$ だったし、電磁場に関しては $A'_{\mu}(x') = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}(x)$ となっていた。$\psi'(x')$ と $\psi(x)$ とは、どういう関係にあるだろうか？

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x). \tag{4.53}$$

のように線形変換で関係づけられるとしよう。ここで $U(\Lambda)$ はローレンツ変換 Λ ごとに決まる 4×4 行列。

$$\begin{aligned}(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi' &= (i\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu} - m)U(\Lambda)\psi \\ &= i\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}U(\Lambda)\psi - U(\Lambda)i\gamma^{\mu}\partial^{\mu}\psi \\ &= U(\Lambda)[U(\Lambda)^{-1}i\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}U(\Lambda)\psi - i\gamma^{\nu}]\partial_{\nu}\psi.\end{aligned} \tag{4.54}$$

ということで、式 (3.34) と式 (4.52) が同時に満たされると要求すると、

$$\begin{aligned}U(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}U(\Lambda)^{-1} &= \gamma^{\nu} \\ U(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda_{\mu}{}^{\nu}U(\Lambda)^{-1}\Lambda^{\rho}{}_{\nu} &= \Lambda^{\rho}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \\ U(\Lambda)\gamma^{\mu}U(\Lambda)^{-1} &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}.\end{aligned} \tag{4.55}$$

ということで、ガンマ行列 γ^{μ} と $U(\Lambda)$ が次のような関係を満たしていればよいことが分かった。

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}. \tag{4.56}$$

4.2　ディラック方程式を無限小ローレンツ変換

Λ が与えられたとき、式 (4.56) をみたすような $U(\Lambda)$ を見つけるのが目標。ローレンツ変換は群をなしており、無限小変換について見つければ十分。ということで、

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}{}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{4.57}$$

と展開してみよう。$|\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}| \ll 1$ をみたす。この無限小に対する適切な $U(\Lambda)$ を探す。

4.2.1　無限小ローレンツ変換の性質

式 (1.16) ($g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$) の両辺の $\delta\omega$ の一次の項を比較すると、

$$g_{\mu\alpha}\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}g^{\alpha}{}_{\beta} + g_{\mu\alpha}g^{\mu}{}_{\nu}\delta\omega^{\alpha}{}_{\beta} = 0 \tag{4.58}$$

となり、整理すると、

$$\delta\omega_{\beta\nu} = -\delta\omega_{\nu\beta} \tag{4.59}$$

が得られる。つまり、無限小ローレンツ変換は、２つの添字を持つ反対称テンソルで指定できる。このテンソルの独立な成分の数は、

$$\frac{4\times 3}{2}=6 \tag{4.60}$$

となり、6 成分だ。あらわに書くとこんな感じ。

$$\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \omega_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \omega_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

$\omega_{1,2,3}$ は x,y,z 軸方向のローレンツブースト、$\theta_{1,2,3}$ は空間の回転の自由度に対応する。

4.2.2　無限小ローレンツ変換に対応する $U(\Lambda)$

次に無限小ローレンツ変換に対する $U(\Lambda)$ の形を考察してみよう。恒等変換 ($\Lambda=1$ もしくは $\delta\omega_{\mu\nu}=0$) に対し、$U(\Lambda)=I_4$ なので、$U(\Lambda)$ を $\delta\omega$ の一次の項まで残すと、

$$U(\Lambda)=I_4-\frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \tag{4.62}$$

と書けるはず。ここで、$\sigma^{\mu\nu}$ は各 μ,ν の組み合わせに対して決まる 4×4 行列。さきに見たように、$\delta\omega_{\mu\nu}=-\delta\omega_{\nu\mu}$ なので $\sigma^{\mu\nu}=-\sigma^{\nu\mu}$ としよう。

式 (4.56) の両辺はそれぞれ、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned}(\text{式 (4.56) の左辺}) &\simeq \left(I_4-\frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\gamma^{\mu}\left(I_4+\frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \\ &\simeq \gamma^{\mu}-\frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\gamma^{\mu}+\frac{i}{4}\gamma^{\mu}\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} &(4.63)\\ (\text{式 (4.56) の右辺}) &\simeq \gamma^{\mu}+\delta\omega^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} &(4.64)\end{aligned}$$

ということで、式 (4.56) の両辺を比較すると、

$$\frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}[\sigma^{\alpha\beta},\gamma^{\mu}]=\delta\omega_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\gamma^{\beta} \tag{4.65}$$

$\delta\omega_{\alpha\beta}=-\delta\omega_{\beta\alpha}$ を用いて、上の式の右辺をちょっとお直しする。

$$\frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}[\sigma^{\alpha\beta},\gamma^{\mu}]=\delta\omega_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\gamma^{\beta}=\delta\omega_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^{\beta}-\frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^{\alpha}\right) \tag{4.66}$$

両辺比較すると、

$$[\sigma^{\alpha\beta},\gamma^{\mu}]=-2ig^{\mu\alpha}\gamma^{\beta}+2ig^{\mu\beta}\gamma^{\alpha} \tag{4.67}$$

これが $\sigma^{\mu\nu}$ の満たすべき式。

実は、式 (4.67) を満たす $\sigma^{\alpha\beta}$ はガンマ行列を使って、

$\sigma^{\mu\nu}$ のかたち

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{4.68}$$

と書ける！これが確かに式 (4.67) の解であることをチェックしてみよう。式 (3.38) を用いて、評価していく。

$$\begin{aligned}
(\text{式 (4.67) の左辺}) &= \frac{i}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu - \frac{i}{2}\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu - \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta + \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha \\
&= \frac{i}{2}\gamma^\alpha(2g^{\beta\mu} - \gamma^\mu\gamma^\beta) - \frac{i}{2}\gamma^\beta(2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha) - \frac{i}{2}(2g^{\alpha\mu} - \gamma^\alpha\gamma^\mu)\gamma^\beta + \frac{i}{2}(2g^{\beta\mu} - \gamma^\beta\gamma^\mu)\gamma^\alpha \\
&= 2ig^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2ig^{\mu\alpha}\gamma^\beta
\end{aligned} \tag{4.69}$$

ということで確かにみたされていることが分かった。

4.3 ディラック方程式を有限ローレンツ変換

4.4 スピノル

5 ローレンツ群についてもっと

前の章でスピノルというのをみた。せっかくなので、ローレンツ群の表現を少し勉強しておこう。

5.1 ローレンツ群の代数

5.1.1 回転群の代数とスピンの復習

ローレンツ群は回転群と似てる。回転群について復習しよう。三次元空間の回転は、3×3 の直交行列 R（$R^T R = I$ を満たす）を使って次のように書かれる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

この直交行列 R を

$$R = I + \delta \tag{5.2}$$

と書いてみよう。R は直交行列であることから

$$(I + \delta^T)(I + \delta) = I \tag{5.3}$$

δ が無限小の場合を考えてみよう。両辺の δ の一次の項だけ比較すると、次の関係式をえる。

$$\delta^T + \delta = 0. \tag{5.4}$$

このような δ の一般的な解は、θ_1, θ_2, θ_3 という 3 つのパラメーターを使って

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

と書ける。J_1, J_2, J_3 は次のように定義された 3×3 行列を定義してみよう。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

これを使うと δ は簡単に書ける。

$$\delta = i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3 \tag{5.7}$$

J_1, J_2, J_3 は回転群の生成子と呼ばれる。J_1, J_2, J_3 は次の交換関係を満たすことが重要！

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \qquad [J_2, J_3] = iJ_1, \qquad [J_3, J_1] = iJ_2. \tag{5.8}$$

一般に式 (5.8) のような交換関係をみたす、$n \times n$ 行列の 3 つ組のセットは多数存在する。以下結果だけをまとめる。各表現はスピンで特徴付けられる。スピン s の表現の次元は $2s+1$ であり、J_z の固有値は $-s, -s+1, \cdots, s-1, s$ となる。特に、スピン 1/2 の表現は 2×2 のパウリ (Pauli) 行列を使って書ける。

$$J_i^{(1/2)} = \frac{1}{2}\sigma_i. \tag{5.9}$$

パウリ行列の定義は以下。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

5.1.2　ローレンツ群の代数

回転群でやった議論をローレンツ群にも適用してみよう。

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5.11}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ は次のような性質をみたす。

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}. \tag{5.12}$$

5.1.3　無限小ローレンツ変換と生成子

ローレンツ変換の行列を $\Lambda^\mu{}_\alpha = g^\mu{}_\nu + \delta^\mu{}_\nu$ と分解してみよう。δ が無限小とすると、次の関係式を得る。

$$g_{\mu\alpha}\delta^\mu{}_\beta + g_{\mu\beta}\delta^\mu{}_\alpha = 0. \tag{5.13}$$

[式 (5.4) と式 (5.13) を比較] 一般解は 6 つのパラメーターを使って次のように書ける。

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \omega_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \omega_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

[式 (5.5) と式 (5.14) を比較]

$$\delta^{\mu}{}_{\nu} = i\sum_{k=1}^{3}\theta_k J_k + i\sum_{k=1}^{3}\omega_k K_k \tag{5.15}$$

[式 (5.7) と式 (5.15) を比較] J_i は回転の生成子。K_i は i 軸方向のローレンツブーストの生成子。z 軸周りの回転が $\exp(i\theta J_3)$ と書けるように、z 軸方向のローレンツブーストは $\exp(i\eta K_3)$ と書ける！

次の交換関係（代数）を得る。

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \tag{5.16}$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \tag{5.17}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k. \tag{5.18}$$

[式 (5.8) と式 (5.16, 5.17, 5.18) を比較]

5.2 スピン、ヘリシティ、カイラリティ

以前、無限小ローレンツ変換の生成子の具体的な形をみた。ディラック方程式の解が角運動量で分類できるのが分かる。角運動量演算子は

$$J_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

と書けることをみた。特に、

$$J_i = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

この形を見ると c_1 成分と c_1' は $J_z = +1/2$ を持ち、c_2 成分と c_2' 成分は $J_z = -1/2$ を持つことが分かる。特に、静止している $(p_z = 0)$ 解を考えたとしても角運動量を持っていることが分かり、これはスピン角運動量と解釈できる。つまり、ディラック方程式はスピン 1/2 を表すことができている！

（動いている $(p_z \neq 0)$ 解を考えると、ヘリシティ。）

5.3　ローレンツ群の表現の一般論

5.3.1　A スピン、B スピン

ローレンツ群の表現の一般論をやるために、A スピン、B スピンを定義してみよう。

$$A_i \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \tag{5.21}$$

$$B_i \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \tag{5.22}$$

式 (5.16, 5.17, 5.18) を使うと、A_i と B_i について次の交換関係（代数）を得る。

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \tag{5.23}$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \tag{5.24}$$

$$[A_i, B_j] = 0. \tag{5.25}$$

A_i、B_i はそれぞれ回転群と同じ代数を為していることが分かり、さらに A_i と B_i は可換なことも分かる。A に対する "スピン" と B に対する "スピン" を、それぞれ A スピン、B スピンと呼ぶことにしてみよう。A スピンと B スピンの大きさを指定することにより、ローレンツ群の既約表現が一つ決まる。表現の次元は $(2A+1)(2B+1)$ になる。

5.4　ローレンツ群の表現の具体例

5.4.1　スカラー

A スピン、B スピンをともに 0 としてみよう。$(0,0)$ と書く。この表現の次元は

$$(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 1) = 1 \tag{5.26}$$

であり、

$$J_i = 0, \qquad K_i = 0. \tag{5.27}$$

ローレンツ変換に対し不変なことが分かる。ローレンツスカラー。

5.4.2　ワイルスピノル

$(1/2, 0)$ に対して、

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \qquad B_i = 0. \tag{5.28}$$

なので、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \qquad K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i. \tag{5.29}$$

$(0, 1/2)$ に対して、

$$A_i = 0, \qquad B_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \tag{5.30}$$

なので、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \qquad K_i = \frac{i}{2}\sigma_i. \tag{5.31}$$

5.4.3　ディラックスピノル

ディラックスピノルは既約表現ではない。

$$\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right) \tag{5.32}$$

5.4.4　ベクトル

$(1/2,1/2)$ はベクトル。

$$H = A_0 I_2 + A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3. \tag{5.33}$$

$$H \to \exp\left(\frac{i}{2}\theta_i\sigma_i + \frac{\omega_i}{2}\sigma_i\right)^\dagger H \exp\left(\frac{i}{2}\theta_i\sigma_i + \frac{\omega_i}{2}\sigma_i\right) \tag{5.34}$$

6　ゲージ対称性のはなし

電磁場中の電子のふるまいについて、相対論的効果を取り入れて議論できるのが、ディラック方程式の醍醐味のひとつ。電磁場をディラック方程式に入れたい！どうやればいいんだろう。この章では、電磁気学がゲージ対称性もつゲージ理論であることを復習し、さらに、ゲージ対称性を利用することにより荷電粒子の従う方程式が簡単に導いてみよう。

ゲージ理論はめちゃくちゃ大事な考え方。β 崩壊を引き起こす弱い相互作用はゲージ理論で記述される。また、クォークを 3 つひとまとめにして陽子や中性子を作る強い相互作用もゲージ理論で記述される。

[4,5]

6.1　古典電磁気学のゲージ対称性

電磁気学からゲージ対称性を見出してみよう。

6.1.1　ゲージ対称性

任意の関数 $\lambda(t,\vec{x})$ のもとで、ゲージ変換

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda \tag{6.1}$$

に対して、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \to \qquad \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \tag{6.2}$$

ということで、$F_{\mu\nu}$ は不変。

成分にバラすと、ゲージ変換は、

$$\phi \to \phi + \frac{\partial}{\partial t}\lambda, \qquad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda. \tag{6.3}$$

であり、 式 (4.27) を使うと、電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$ がそれぞれ同じになることが分かる。つまり、同じ物理的な状況を記述する $\phi(t, \vec{x})$ と $\vec{A}(t, \vec{x})$ は一通りに定まらない！こういう状況を「ゲージ対称性がある」というのであった。

6.2 電磁場中の荷電粒子

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は次のようなものだった。

$$m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \tag{6.4}$$

以下のラグランジアンから運動方程式が得られることを見てみよう。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e\vec{A}\dot{\vec{x}}. \tag{6.5}$$

オイラーラグランジュ方程式は（工事中）

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{x}} + e\vec{A}\right) + e\vec{\nabla}\phi - e\vec{\nabla}(\vec{A}\dot{\vec{x}}) = \cdots \tag{6.6}$$

さて、ラグランジアンをルジャンドル変換することにより、ハミルトニアンが次のように書けることも分かる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi. \tag{6.7}$$

どうも、以下の置き換えルールに従えば、ハミルトニアンが得られるようだ。

$$\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}, \qquad H \to H - e\phi. \tag{6.8}$$

量子力学では、式 (6.8) を参考にして、次のような演算子の「置き換えルール」を採用すると上手く行く。

$$i\frac{\partial}{\partial t} \to i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi, \qquad i\vec{\nabla} \to i\vec{\nabla} - e\vec{A}. \tag{6.9}$$

ハミルトニアンは次のようになる。

$$H = -\frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 + e\phi \tag{6.10}$$

6.3 量子力学とゲージ対称性

違う論理を使って、式 (6.10) のハミルトニアンにたどり着くこともできる。波動関数 ψ の位相を回転されるような

$$\psi \to e^{i\lambda}\psi \tag{6.11}$$

変換に対して対称性があることを要求してみよう。そうすると、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを導入して、それらが変換のもとで以下のように振る舞うことが要求される。

$$\phi \to \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \qquad \vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda. \tag{6.12}$$

この考え方はとても便利。これはゲージ対称性を原理として話を始めていることになる。マックスウェル方程式とも良く馴染むし、むしろこうやって議論する方が自然。

7　電磁場中のディラック (Dirac) 方程式

　さて、前の章で、

$$\psi(x) \to e^{ie\lambda(x)}\psi(x) \tag{7.1}$$

というゲージ変換に対する共変性を要求すれば、必然的にスカラーポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを導入することになり、電磁場との相互作用が入ることが分かった。この手続きにより、ディラック方程式に電磁場を導入してみよう。具体的な手続きとしては、以下のような微分演算子の置き換えを行えばいい。

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu. \tag{7.2}$$

結果として、電磁場中のディラック方程式は次のようになる。

電磁場中のディラック方程式

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu + e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0. \tag{7.3}$$

式 (7.3) は、次のような変換に対して共変。

$$\psi(x) \to e^{ie\lambda(x)}\psi(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu - \partial_\mu\lambda(x). \tag{7.4}$$

7.1　非相対論的極限と磁気双極子モーメント

　ディラックスピノルの上 2 成分を ψ_+、下 2 成分を ψ_- と名付けてみよう。つまり、次のように分解する。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

ガンマ行列は次のように書けた。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

ディラック方程式を ψ_+ と ψ_- で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t + e\phi - m & (i\vec{\nabla} + e\vec{A})\cdot\vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A})\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t - e\phi - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0. \tag{7.7}$$

式を整理するために次のような $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ を定義してみよう。

$$\tilde{\psi}_+ = e^{imt}\psi_+, \qquad \tilde{\psi}_- = e^{imt}\psi_-. \tag{7.8}$$

ディラック方程式を $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t + e\phi & (i\vec{\nabla} + e\vec{A})\cdot\vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A})\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t - e\phi - 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_+ \\ \tilde{\psi}_- \end{pmatrix} = 0. \tag{7.9}$$

非相対論的な極限、つまり電子の運動エネルギーが静止エネルギーに比べて小さい極限を考えてみよう。$|m\tilde{\psi}_-| \gg |(i\partial_t - eA_0)\tilde{\psi}_-|$ に違いない。ということは、

$$(i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\tilde{\psi}_+ + 2m\tilde{\psi}_- \simeq 0. \tag{7.10}$$

これを式 (7.9) の一行目に代入すると、

$$(-i\partial_t + eA_0)\tilde{\psi}_+ + (-i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \left[-\frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\tilde{\psi}_+ \right] = 0. \tag{7.11}$$

左辺の第二項がゴチャゴチャしている。ちょっと整理してみよう。特にこの関係式を使う。

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_j \times (-i\partial_i + eA_i)(i\partial_j - eA_j) &= (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \times (-i\partial_i + eA_i)(i\partial_j - eA_j) \\
&= (\vec{\nabla} + ie\vec{A})^2 + i\epsilon_{ijk}\partial_k(ieA_i\partial_j + ie\partial_i A_j) \\
&= (\vec{\nabla} + ie\vec{A})^2 - e\epsilon_{ijk}\sigma_k(\partial_i A_j)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

結局まとめると、

$$i\frac{\partial\tilde{\psi}_+}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} + ie\vec{A})^2\tilde{\psi}_+ + \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\tilde{\psi}_+ - eA_0\tilde{\psi}_+. \tag{7.13}$$

電荷を持った粒子のシュレーディンガー方程式と比較してみよう。右辺第一項と第三項と同じものは式 (6.10) のハミルトニアンにある。新しいのは右辺第二項の $\sigma \cdot (\nabla \times A)$ を含む項。$\nabla \times A$ は磁場。σ はスピン。つまり、磁場とスピンの相互作用項がうまれた！

ハミルトニアンに

$$H = \frac{ge}{2m}\vec{s} \cdot \vec{B}. \tag{7.14}$$

という項が足され、$g = 2$ ととったのと同じ。この係数は g 因子と呼ばれている。g 因子の測定値は Particle Data Group[8] などを参照のこと。

$$g_e = 2.00231930436182 \pm 0.00000000000052. \tag{7.15}$$

確かに g 因子の測定値はほぼ 2 であること[9] が分かり、ディラック方程式が上手くいっているのが分かる。

7.2 水素原子の微細構造

クーロンポテンシャル中の電子のエネルギースペクトルを求めてみよう。ディラック方程式を使うと相対論的な補正が計算できる。

`https://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure#Exact_relativistic_energies`

[8] `https://pdglive.lbl.gov/Particle.action?node=S003&init=0`

[9] g 因子はだいたい 2 だが、有意に 2 からズレているのが見える。このズレは異常磁気モーメントと呼ばれていて、理論的に計算するには場の量子論が必要。（例えば Peskin-Schroeder の教科書の 6.3 章など）電気の異常磁気モーメントは量子電磁力学の検証にとって非常に重要。さらに、ミュー粒子の磁気双極子モーメントは素粒子現象論のホットトピックの一つ [6]。以下のようなページを参照のこと。
`http://comet.phys.sci.osaka-u.ac.jp/research/r000.html`
`https://g-2.kek.jp/portal/index.html`

7.2.1　角運動量とパリティで固有状態を整理しよう

水素原子の束縛状態のエネルギーは以下のように書けた。

$$E = -\frac{\alpha m}{2n^2} \tag{7.16}$$

束縛エネルギーは主量子数だけで決まっていた。たとえば、$2p$ 軌道で全角運動量が $j = 1/2$ のものと $j = 3/2$ のものが縮退している。どんな状態があったか、保存されている良い量子数で分類してみよう。

波動関数 ψ のパリティ変換を次のように定義すると、

$$\psi_P(t, \vec{x}) \equiv \beta\psi(t, -\vec{x}). \tag{7.17}$$

ψ が

$$E\psi = (\vec{p}\cdot\vec{\alpha} + m\beta + V(r))\psi \tag{7.18}$$

を満たすなら、ψ_P も同じ方程式を満たすことが分かる。よって、角運動量とパリティで状態を分類するのが良いことが分かる。パリティ変換の定義から、上 2 成分がパリティeven で下 2 成分がパリティodd。角運動量 $j-1/2$ と $1/2$ の合成は次のようになる。

$$|j,m\rangle_1 = \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\left|j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\left|j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{7.19}$$

$$|j,m\rangle_2 = \sqrt{\frac{j+1-m}{2j}}\left|j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{j+1-m}{2j}}\left|j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle. \tag{7.20}$$

$$P|j,m\rangle_1 = (-1)^{j-1/2}|j,m\rangle_1, \qquad P|j,m\rangle_2 = (-1)^{j+1/2}|j,m\rangle_2. \tag{7.21}$$

$$\Phi_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2j}}\begin{pmatrix} \sqrt{j+m}Y_{j-1/2}^{m-1/2} \\ \sqrt{j-m}Y_{j-1/2}^{m+1/2} \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

$$\Phi_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2j}}\begin{pmatrix} \sqrt{j+1+m}Y_{j+1-1/2}^{m-1/2} \\ \sqrt{j+1-m}Y_{j+1-1/2}^{m+1/2} \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} u(r)\Phi_\pm \\ -iv(r)\Phi_\pm \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

（もろもろの計算）

まとめると、動径方向の波動関数は次のように与えられる。(k は整数)

$$(E - m - V(r))\,u(r) + \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)v(r) = 0, \tag{7.25}$$

$$(E + m - V(r))\,v(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)u(r) = 0. \tag{7.26}$$

7.2.2 クーロンポテンシャル中の動径方向の波動関数

クーロンポテンシャル

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \tag{7.27}$$

を代入してみよう。次のような微分方程式が得られる。

$$\left(E - m + \frac{Ze^2}{r}\right) u(r) + \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right) v(r) = 0, \tag{7.28}$$

$$\left(E + m + \frac{Ze^2}{r}\right) v(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right) u(r) = 0. \tag{7.29}$$

がえられる。束縛状態の波動関数を計算したい。水素原子で計算したときみたいに

- 原点で波動関数が発散しない
- 遠方で波動関数が指数関数的に落ちていく

の 2 点を要求し、どのようなエネルギー固有値 E がえられるか計算していく。まず、式 (7.28) と式 (7.29) は、原点付近 ($r \simeq 0$) で

$$\frac{du}{dr} \simeq -\frac{k}{r} u(r) - \frac{Ze^2}{r} v(r), \tag{7.30}$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq \frac{k}{r} v(r) - \frac{Ze^2}{r} u(r). \tag{7.31}$$

これを解くと、

$$u \propto r^\gamma, \qquad v \propto r^\gamma, \qquad \gamma \equiv \sqrt{k^2 - Z^2 e^4} \tag{7.32}$$

また、r が大きいところ ($r \simeq \infty$) で

$$\frac{du}{dr} \simeq -(E + m) v(r), \tag{7.33}$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq (E - m) u(r). \tag{7.34}$$

これを解くと、

$$u \propto e^{-\lambda r}, \qquad v \propto e^{-\lambda r}, \qquad \lambda \equiv \sqrt{m^2 - E^2} \tag{7.35}$$

$u(r)$ と $v(r)$ を次のように書いてみよう。

$$u = r^\gamma e^{-\lambda r} \tilde{u}(r), \qquad v = r^\gamma e^{-\lambda r} \tilde{v}(r). \tag{7.36}$$

$\tilde{u}$ と $\tilde{v}$ に対して、次のような微分方程式をえる。

$$\left(E - m + \frac{Ze^2}{r}\right) \tilde{u}(r) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{\gamma - k}{r} - \lambda\right) \tilde{v}(r) = 0, \tag{7.37}$$

$$\left(E + m + \frac{Ze^2}{r}\right) \tilde{v}(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{\gamma + k}{r} - \lambda\right) \tilde{u}(r) = 0. \tag{7.38}$$

$\tilde{u}$ と $\tilde{v}$ は r に関する有限次の多項式になっていると、欲しい性質が満たせる。

$$\tilde{u} = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n, \qquad \tilde{v} = \sum_{n=0}^{N} b_n r^n. \tag{7.39}$$

$n \geq 1$ に対し、次のような漸化式がえられる。

$$(E-m)a_{n-1} + Ze^2 a_n + (n+\gamma-k)b_n - \lambda b_{n-1} = 0, \tag{7.40}$$

$$(E+m)b_{n-1} + Ze^2 b_n - (n+\gamma-k)a_n + \lambda a_{n-1} = 0. \tag{7.41}$$

$\lambda/(E-m)\times$ 式 (7.40) $-$ 式 (7.41) を計算すると、a_{n-1} と b_{n-1} が同時に消せる。結果、a_n と b_n が次のように関係づくことが分かる。

$$\left(\frac{\lambda Ze^2}{E-m} + n + \gamma - k\right) a_n + \left(\frac{\lambda}{E-m}(n+\gamma-k) - Ze^2\right) b_n = 0. \tag{7.42}$$

$a_{N+1} = b_{N+1} = 0$ を用いると、

$$\left(\frac{\lambda Ze^2}{E-m} + n + \gamma - k\right) a_n + \left(\frac{\lambda}{E-m}(n+\gamma-k) - Ze^2\right) b_n = 0, \tag{7.43}$$

$$(E-m)a_n - \lambda b_n = 0. \tag{7.44}$$

$a_N \neq 0$、 $b_N \neq 0$ となるには、

$$-\lambda\left(\frac{\lambda Ze^2}{E-m} + n + \gamma - k\right) - (E-m)\left(\frac{\lambda}{E-m}(n+\gamma-k) - Ze^2\right) = 0. \tag{7.45}$$

これを整理すると、

$$\frac{n - k + \sqrt{k^2 - Z^2e^4}}{Ze^2} = \frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \tag{7.46}$$

これを解くと、

$$E = m \times \left(1 + \left(\frac{Ze^2}{n - k + \sqrt{k^2 - Z^2e^4}}\right)^2\right)^{-1/2}. \tag{7.47}$$

k に $j+1/2$ を代入して、

$$E_{n,j} = m \times \left(1 + \left(\frac{Ze^2}{n - (j+1/2) + \sqrt{(j+1/2)^2 - Z^2e^4}}\right)^2\right)^{-1/2}. \tag{7.48}$$

というエネルギー解がえられた。さて、この式を $Ze^2 \ll 1$ として、摂動展開してみよう。Ze^2 の 4 次まで計算すると、次のような式がえられる。

$$E_{n,j} = m - \frac{mZ^2e^4}{2n^2} + \frac{mZ^4e^8}{n^4}\left(\frac{3}{8} - \frac{n}{2(j+1/2)}\right) + \mathcal{O}(Z^6e^{12}). \tag{7.49}$$

右辺の第 1 項は電子の静止エネルギーである。第 2 項はシュレーディンガー方程式から得られるエネルギー準位に等しいことが分かる。第 3 項が相対論的な効果からの補正とみなせる。特に、n が同じでも j の値が違うと準位の縮退が解けることがみてとれる。たとえば、$2p$ 軌道が $j = 1/2$ と $3/2$ の 2 つに分裂する。

波動関数は超幾何級数を使って書ける。詳細は例えば、相対論的量子力学（西島和彦）。

8 場の量子論入門

場の量子論の初歩として、自由スカラー場を扱う。

8.1 なぜ場の量子論か?: ディラック方程式の限界

これまで相対論的に量子力学を記述しようとしてディラック方程式を調べてきたが、ディラック方程式には限界がある。まず、スピン 1/2 は相対論＋量子力学の必然ではありえない。スピン 0 とか 1 の粒子いるし。さらに、ディラック方程式では粒子の数が変わる反応が扱えない。$\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ とかどうしたらいいの？

ということで場の量子論を勉強しよう。しかし、特殊相対論と量子力学を合体させたいだけなのに、どうして量子場なんてものを導入しないのを導入しないといけないのか？

- 多体系を扱える枠組みが必要。粒子の数が変わる反応が起きる。$\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$、ガンマ線による電子陽電子対生成など。
- 因果律とクラスター分解原理を満たすような相互作用を入れる必要がある。（詳細は、ワインバーグ場の量子論の教科書の第 4 章および第 5 章などを参照のこと。）

8.2 相互作用しないスピン 0 粒子

一番カンタンな例として相互作用しないスピン 0 の粒子を考えよう。真空 $|0\rangle$ と、生成消滅演算子のセット a_p, $a_p^\dagger$ があって、

$$a_p|0\rangle = 0, \tag{8.1}$$

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p-q), \tag{8.2}$$

$$[a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0. \tag{8.3}$$

を満たす。この粒子がひとつ存在する状態は、

$$a_p^\dagger|0\rangle \tag{8.4}$$

と表せる。このハミルトニアンはこうなるはず。

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} a_p^\dagger a_p. \tag{8.5}$$

8.2.1 自由スカラー場

ここでは、正準量子化によりハミルトニアンを計算してみる。

場のラグランジアンを次のように与えてみよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi \tag{8.6}$$

なぜこんなラグランジアンを採用するのだろうか？最終的に式 (8.5) のハミルトニアンが出れば結果オーライ。ϕ に対する正準運動量は

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x). \tag{8.7}$$

とあたえられる。

8.2.2 場の正準量子化

正準量子化の手続きにより、次の交換関係を導入する。

$$[\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = 0, \tag{8.8}$$

$$[\pi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = 0, \tag{8.9}$$

$$[\phi(t,\vec{x}), \pi(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{8.10}$$

$\phi = \phi^\dagger$ であること、$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$ であることを使うと、フーリエ展開して、

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t} \right). \tag{8.11}$$

$\pi = \dot{\phi}$ なので、

$$\pi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left(-i a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + i a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t} \right). \tag{8.12}$$

$a_p,\ a_p^\dagger$ の交換関係を次のようにおくと、

$$[a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0, \qquad [a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(p-q). \tag{8.13}$$

式 (8.8, 8.9, 8.10) の場の交換関係が確かに満たされることが分かる。

8.2.3 ハミルトニアンを計算しよう

ハミルトニアン（密度）を計算してみよう。正準量子化の手続きにより、

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{8.14}$$

右辺の項はそれぞれ、

$$\int d^3x \frac{1}{2}\pi^2 = \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{E_pE_q}}{2}\left(-a_pa_qe^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_pa_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}}\right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_p}{2}\left(-a_pa_{-p} + a_pa_p^\dagger + a_p^\dagger a_p - a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\right), \tag{8.15}$$

$$\int d^3x \frac{1}{2}(\nabla\pi)^2 = \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\vec{p}\vec{q}}{2\sqrt{E_pE_q}}\left(-a_pa_qe^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_pa_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}}\right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{2E_p}\left(a_pa_{-p} + a_pa_p^\dagger + a_p^\dagger a_p + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\right), \tag{8.16}$$

$$\int d^3x \frac{m^2}{2}\phi^2 = \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{2\sqrt{E_pE_q}}\left(a_pa_qe^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_pa_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}}\right)$$
$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{m^2}{2E_p}\left(a_pa_{-p} + a_pa_q^\dagger + a_p^\dagger a_q + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger\right). \tag{8.17}$$

全部足して次のようなハミルトニアンを得る。

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_p}{2}(a_p^\dagger a_p + a_pa_p^\dagger) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_pa_p^\dagger a_p + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{E_p}{2}\delta^{(3)}(0) \end{aligned} \tag{8.18}$$

最終行の 1 つ目の項はまさに欲しかったもの！2 つ目の項はなんだろう？なんだか発散しているのが気になるけど、定数なので落としてしまってよい。なぜなら物理的に意味のあるのはある状態と別のある状態のエネルギー差なのだから。[10]

8.3 相互作用のある場の量子論に向けて：因果律

8.4 相互作用をいれてみよう：スカラー粒子の崩壊

最後に相互作用のある場の理論の計算で簡単なものをやってみよう。より系統的な議論は、場の量子論の教科書を参考にしてほしい。

$$\mathcal{L}_{int.} = -\kappa\phi\chi_1\chi_2. \tag{8.19}$$

8.5 相互作用の高次の項をいれると発散が出てくる

相互作用の高次の項をいれると、計算結果のいたるところに発散が出てくる。もちろん、物理的に意味のある量は有限の値を持つはずなので、発散する量をなんとか有限な量にするような処理（正則化とくりこ

[10] 重力があるとこうもいかなくなってくる。実際、ダークエネルギーの大きさは謎。ちなみに超対称性というのを入れると、ボゾンとフェルミオンでキャンセルしあって上手いこと消えたりする。が、今の所、超対称性の証拠は残念ながら見つかっていない。

み）が必要になる。詳しくは場の量子論の教科書で。朝永振一郎が、場の量子論が出来ていく課程で発散の処理に悩まされる様子を日記に記している。

滞独日記（朝永振一郎）より引用（1938 年 12 月 14 日の日記）『計算すすめたら積分が発散した，おかしい．こういうことをやっているのだ．U〔中間子〕が直接に e〔電子〕と ν〔中性微子〕にこわれずに，U は一度 p〔陽子〕と n〔中性子〕を作り，それをさらに e と ν にこわれると考えようというのだ．ところが中間状態の p，n の状態がやたらにたくさんあって，積分が発散してしまうのである．こういう種類の発散は今まで一度も出てきていない．自己エネルギー的の発散ならめずらしくないが，どうもおかしい.』

A　回転群の表現論

次のような演算子を定義してみよう。

$$J_+ \equiv J_1 + iJ_2, \qquad J_- \equiv J_1 - iJ_2 \tag{A.1}$$

容易に次の交換関係がチェックできる。

$$[J_3, J_+] = J_+, \qquad [J_3, J_-] = -J_-. \tag{A.2}$$

表現が有限次元であることから、

$$J_+|m\rangle = 0, \qquad J_-|m'\rangle = 0. \tag{A.3}$$

となる m と m' が存在する。すなわち、

$$||J_+|m\rangle||^2 = \langle m|J_-J_+|m\rangle = 0, \tag{A.4}$$

$$||J_-|m'\rangle||^2 = \langle m'|J_+J_-|m'\rangle = 0. \tag{A.5}$$

代数から導かれるこの関係式を使う。

$$J_-J_+ = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^3) - J_3^3 - J_3, \qquad J_+J_- = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^3) - J_3^3 + J_3. \tag{A.6}$$

そうすると、

$$m^2 + m = m'^2 - m' \tag{A.7}$$

ある整数 n を使って $|m'\rangle \propto (J_-)^n|m\rangle$ と書けることを使うと、

$$m' = m - n \tag{A.8}$$

代入して整理すると、

$$(n - 2m)(n + 1) = 0 \tag{A.9}$$

結局、以下を得る。

$$n = 2m, \qquad m' = -m. \tag{A.10}$$

参考文献

[1] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, “Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry,” Phys. Rept. **494**, 1-196 (2010) [arXiv:0812.1594 [hep-ph]].

[2] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610-624 (1928)

[3] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “ADLER-BELL-JACKIW ANOMALY AND WEYL FERMIONS IN CRYSTAL,” Phys. Lett. B **130**, 389-396 (1983)

[4] 風間洋一, “ゲージ対称性と現代物理学”, `http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/gaugesym(suuri-kagaku).pdf`

[5] 深谷英則, “なぜ、量子重力は (QCD に比べて) 難しいのか？”, 素粒子論研究・電子版 **25** (2016) No. 2

[6] 遠藤基, 岩本祥, 北原鉄平, “此のたびのミューオン異常磁気能率〜おぼろげながら，しかしはっきりと浮かんできたミューオン $g-2$ アノマリー〜”, 高エネルギーニュース **40** (2021) No. 2