

相対論的量子力学／場の理論序説

佐藤亮介

2022年8月8日

2022年前期の相対論的量子力学／場の理論序説の講義ノートです。誤植や間違いなど見つけた場合は rsato@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp までお願いいたします。講義に関する情報は <http://kabuto.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~rsato/> に随時掲載予定です。以下、参考文献です。

- 相対論的量子力学（西島和彦、培風館）
- スピンはめぐる（朝永振一郎、みすず書房）
- 演習 場の量子論（柏太郎、SGC books）
- 場の量子論: 不変性と自由場を中心にして（坂本真人、裳華房）
- Relativistic quantum physics : from advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory (Tommy Ohlsson, Cambridge University Press)

目次

0	特殊相対論と量子力学を合体させたい	4
1	復習と準備	4
1.1	自然単位系	5
1.2	特殊相対論	6
1.3	(非相対論的) 量子力学	7
2	クラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式	8
2.1	クラインゴルドン方程式の平面波解	9
2.2	確率解釈できるか?	9
3	ディラック (Dirac) 方程式	10
3.1	\hat{H} を行列にすれば上手いきそう	11
3.2	$\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の解	11
3.3	後々のためディラック方程式ちよつと書き直す	13
3.4	他にも β, α_i の解はある	14
3.5	連続の方程式をチェックしよう	14

3.6	ディラック方程式の平面波解	15
3.7	ディラック (Dirac) の海、反粒子	16
3.8	積み残した疑問	17
4	ローレンツ変換とディラック方程式	17
4.1	方程式とローレンツ変換	17
4.1.1	反変ベクトル、共変ベクトル、テンソル	18
4.1.2	クラインゴルドン方程式	19
4.1.3	マックスウェル (Maxwell) 方程式を特殊相対論ぽく書く	20
4.1.4	ディラック方程式はどう?	22
4.2	スピノルの無限小ローレンツ変換	22
4.2.1	無限小ローレンツ変換の性質	23
4.2.2	無限小ローレンツ変換に対応する $U(\Lambda)$	23
4.3	スピノルの有限ローレンツ変換	24
4.3.1	z 軸まわりの回転	25
4.3.2	z 軸方向のブースト	27
4.4	スピン	28
5	ローレンツ群についてもっと	29
5.1	群とか表現とか Lie 代数とか: 回転群の代数とスピンの復習	29
5.1.1	群	29
5.1.2	Lie 代数	30
5.1.3	表現	31
5.2	ローレンツ群の代数	34
5.3	ローレンツ群の表現の一般論 (A スピン、B スピン)	35
5.4	ローレンツ群の既約表現の具体例	36
5.4.1	スカラー	36
5.4.2	ワイルスピノル	36
5.4.3	ベクトル	37
5.5	質量 0 のフェルミオンとワイルスピノル	37
5.5.1	質量 0 の時のディラック方程式	37
5.5.2	2 つのワイルスピノルの物理的意味	38
5.5.3	ローレンツ群の表現としてのワイルスピノル	39
5.5.4	ディラックスピノル	39
5.6	カイラリティ、ヘリシティ、パリティ	39
5.7	ローレンツ群のまとめ	40
6	電磁場中のディラック (Dirac) 方程式	40
6.1	ゲージ対称性について復習	41
6.1.1	古典電磁気学のゲージ対称性	41
6.1.2	電磁場中の古典粒子	41
6.1.3	電磁場中の量子力学	42

6.1.4	量子力学とゲージ対称性	42
6.2	電磁場中のディラック (Dirac) 方程式と g 因子	43
6.3	g 因子の測定値と比較してみよう	44
6.3.1	電子とミュー粒子	44
6.3.2	陽子	45
6.4	ディラック方程式の限界	46
7	非相対論的な一次元弦の量子論 (簡単な場の量子論の例)	46
7.1	古典場の理論、有効理論	46
7.1.1	連成ばね	46
7.1.2	連続極限 (低エネルギー極限)	47
7.1.3	有効理論という考え方	48
7.2	連成ばねの量子論と連続極限	49
7.2.1	調和振動子	49
7.2.2	連成振動	50
7.2.3	連続極限	52
7.3	一次元弦の量子論	54
7.3.1	L が有限の場合	54
7.3.2	$L \rightarrow \infty$ 極限	55
7.3.3	まとめ	56
8	ローレンツ不変な自由スカラー場の量子論	56
8.1	相互作用しないスピン 0 粒子ってどんな感じ?	56
8.2	自由実スカラー場の正準量子化	57
8.2.1	まずは生成消滅演算子	58
8.2.2	ハミルトニアン	59
8.3	ネーターの定理と保存量	60
8.3.1	複素スカラー場	61
8.3.2	時間空間並進 (ハミルトニアン、運動量演算子)	61
8.4	局所因果律と反粒子	62
8.4.1	異時刻交換関係	62
8.4.2	反粒子について (自由複素スカラー場の場合)	64
9	相互作用のある場の量子論について	65
9.1	相互作用の高次の項をいれると発散が出てくる	65
9.2	場の量子論スゴイその 1 : 電子磁気双極子モーメント	65
9.3	場の量子論スゴイその 2 : ハドロンの質量スペクトル	65
9.4	場の量子論スゴイその 3 : 標準模型	65
A	$SU(2)$ リー代数について	66

B	場の量子論を勉強した後に相対論的量子力学を振り返ってみる。	69
B.1	確率解釈とディラックスピノル	70
B.2	確率解釈できないと言って捨てたはずのクラインゴールドン方程式について	70
B.3	ディラックの海はどこへ行った	70
C	ジグザグ運動 (Zitterbewegung、ツィッターベヴェーグク)	70
D	水素原子の微細構造	70
D.1	角運動量とパリティで固有状態を整理しよう	70
D.2	クーロンポテンシャル中の動径方向の波動関数	71

0 特殊相対論と量子力学を合体させたい

これまでの物理学の講義で、

- 原子を始めとするミクロな世界では、古典力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、量子力学を使う必要があること
- 光の速さに近い速度があらわれる状況では、ニュートン力学は必ずしも正しい記述を与えることはなく、特殊相対論を使う必要があること

の2つを学んだ。すると、ミクロな世界で光に近い速度が出てきたらどうなるか、すなわち、特殊相対論と量子力学を同時に使うことはあるだろうか、というのが自然な疑問として浮かび上がるのではないだろうか。例えば、電子と電子が光の速さに近い速度で衝突したらどうなるか、どのように計算すればよいだろうか。

この講義では、特殊相対論と量子力学の基本的な知識を前提として、相対論的量子力学の基礎を学ぶ。具体的に扱うトピックは、

- ディラック方程式
- 自由スカラー場の量子論

の2つ。ディラック方程式はある意味で相対論版のシュレーディンガー方程式とみなすことができ、スピンという概念が自然にあらわれるなど面白い性質がある。自由スカラー場の量子論は、場の量子論の中で一番簡単な例である。自由スカラー場の量子化を通して、場の量子論の基本を学ぼう。相対論的な量子力学を扱うには場の量子論を使う必要があるのが、場の量子論と(非相対論的)量子力学の間のギャップを埋めるのがこの講義の主な目的。

1 復習と準備

相対論的量子力学を学ぶために必要な知識を簡単に復習しつつ準備しよう。

1.1 自然単位系

量子力学の計算にはプランク定数（もしくはディラック定数） \hbar 、特殊相対論の計算には光の速度 c が大事だった。¹

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s}, \quad (1.1)$$

$$c = 2.99 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (1.2)$$

相対論的量子力学をやると、いろんなところに \hbar と c が出てきてすごく面倒。思い切って $\hbar = c = 1$ という単位系を採用してしまおう。これまでは [質量]、[長さ]、[時間] の3つの次元があったが、 $\hbar = 1$ と $c = 1$ を採用したせいで、3つの次元に

$$[\text{質量}] = \frac{1}{[\text{長さ}]} = \frac{1}{[\text{時間}]} \quad (1.3)$$

という関係がつく。例えば、 $c = 1$ を使うと、

$$1 \text{ s} = 2.99 \times 10^8 \text{ m} \quad (1.4)$$

例えば、 $\hbar = 1$ を使うと、

$$1 \text{ s}^{-1} = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV} \quad (1.5)$$

などである。自然単位系を採用したことにより、次元を持つ量が [質量] の何乗かで数えられるようになる。これを質量次元 (mass dimension) と呼ぶ。質量は質量次元 1、長さは質量次元 -1 、時間は質量次元 -1 、速度は質量次元 0。また、

$$\hbar c = 0.197 \text{ GeV fm}. \quad (1.6)$$

という公式を憶えておくと便利。²

特に、エネルギーは質量次元 1。自然単位系を導入する前は、粒子の静止エネルギーを $E = mc^2$ と書いていたが、自然単位系を導入すると、 $E = m$ とかける。粒子の質量を keV、MeV、GeV といったエネルギーの単位で書くのがならわし。例えば、

$$m_{\text{電子}} = 511 \text{ keV}, \quad (1.7)$$

$$m_{\text{陽子}} = 938 \text{ MeV}, \quad (1.8)$$

$$m_{\text{ヒッグス粒子}} = 125 \text{ GeV}. \quad (1.9)$$

などなど。他の例は、Particle Data Group(<https://pdglive.lbl.gov/>) とか³、Wikipedia(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles) をみてみよう。

¹1 GeV = 10^9 eV であり、1 eV = 1.60×10^{-19} J。1 eV は、素電荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C が 1 V の電位差で得るエネルギーで、1 eV = 1 C × 1 V。

²忘れた時は google で「hbar * c in GeV * fm」と検索すると、「0.197326979 GeV * fm」という結果が返ってくる。この例に限らず google の単位換算機能はすごく便利。

1.2 特殊相対論

時間と空間の座標をまとめてベクトルとして書こう。

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$\mu = 0, 1, 2, 3$ 。(自然単位系を採用しているので長さと同じ次元を持つようになった。自然単位系のご利益！)

時空のメトリック (計量) は

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.11)$$

まとめて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.12)$$

と書く。ここで、

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{\mu=0,1,2,3} \sum_{\nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.13)$$

であり、アインシュタインの縮約とよばれる。 $g_{\mu\nu}$ は行列として書くと、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

(教科書によっては $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ のメトリックを採用していることもあるので注意。³)

異なる座標の間のローレンツ変換は、

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (1.15)$$

と書ける。さて、 ds^2 は座標系に依らない。すなわち $g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ であることから、

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (1.16)$$

Λ^μ_α はこの性質を満たすものである。

具体的な例として、 z 軸方向のブーストを行うようなローレンツ変換をあらわにかいてみよう。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & & \gamma\beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \gamma\beta & & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

³矛盾なく使えどちらのメトリックでもいいのだが、人 (と分野?) によって好みはある。[1] の footnote 2 なども参照。場の量子論の教科書なら、Weinberg と Srednicki は $(-1, 1, 1, 1)$ 。Peskin-Schroeder、九後は $(1, -1, -1, -1)$ 。

ここで、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.18)$$

である。ラピディティ η を使って、

$$\gamma = \cosh \eta, \quad \gamma\beta = \sinh \eta. \quad (1.19)$$

と書くこともできる。

また、空間の回転

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos \theta & \sin \theta & \\ & -\sin \theta & \cos \theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

もローレンツ変換の一部。ローレンツ変換は回転のある種の一般化とも言うこともできる。

エネルギーと運動量も同じ次元になったので、4元運動量ベクトルの変換則も簡単に書ける。 $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)^T$ について $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ であるから、成分についてバラすと、

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & & \gamma\beta \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \gamma\beta & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

静止質量 m は、運動量ベクトルから作ったローレンツ不変なスカラー量としてあらわれることを思い出そう。これは静止系の計算と比較すれば明らか。

$$m^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = E^2 - \vec{p}^2. \quad (1.22)$$

$\vec{p} = \vec{0}$ において、 $E > 0$ とすれば、 $E = m$ となるので、 m が静止質量エネルギーであることも分かる。

1.3 (非相対論的) 量子力学

量子力学では、波動関数 ψ を使い、 $|\psi|^2$ を粒子をその場所に見出す確率の密度と解釈することができた。 ψ の時間発展はシュレーディンガー (Schrödinger) 方程式で記述できる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi. \quad (1.23)$$

H はハミルトニアンであり、古典的なハミルトニアン $H(p, x)$ が得られると、

$$H = H \left(p = -i \frac{\partial}{\partial x}, x \right) \quad (1.24)$$

という p を $-i(\partial/\partial x)$ に置き換えるような操作で得られた。とくに、 $H = p^2/2m + V(x)$ のとき、シュレーディンガー方程式のハミルトニアンは、

$$H = -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \quad (1.25)$$

シュレーディンガー方程式をみると、左辺には時間の一階微分。右辺には空間の二階微分。ローレンツ変換は時間と空間を線形に混ぜる。シュレーディンガー方程式では時間と空間は対等ではなく、ローレンツ対称性のもとで良い性質を持っていない。

確率密度 ρ は、

$$\rho = |\psi|^2 \quad (1.26)$$

と定義される。規格化された波動関数を用いると、

$$\int d^3x \rho = \int d^3x |\psi|^2 = 1 \quad (1.27)$$

である。確率密度の時間発展は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \\ &= \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \psi \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

と計算される。ベクトル \vec{j} を

$$\vec{j} \equiv \frac{i}{2m} (\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \frac{i}{2m} (\vec{\nabla} \psi) \psi^*. \quad (1.29)$$

と定義すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.30)$$

と綺麗に書くことができる。 \vec{j} は確率密度の流れを記述するベクトルと解釈できる。この方程式により、確率が各点各点で勝手に湧き出したり吸い込まれたりすることがなく、確率が全体として保存していることが分かる。

2 クラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式

正準量子化における演算子の置き換えルールを思い出してみよう。

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (2.1)$$

というハミルトニアン H が与えられた時、

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i \vec{\nabla} \quad (2.2)$$

という置き換えを採用すると、シュレーディンガー方程式

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (2.3)$$

がえられたのだった。(自然単位系 $\hbar = c = 1$ をとってしまったことに注意！)

…ということは $E^2 = m^2 + p^2$ にこの置き換えルールを適用して、

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (m^2 - \nabla^2)\psi \quad (2.4)$$

とすれば良いのでは?⁴この方程式はクラインゴルドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれる。

2.1 クラインゴルドン方程式の平面波解

クラインゴルドン方程式 (2.4) の平面波解がどんなものか見てみよう。

$$\psi = \exp(iEt - ip_x x - ip_y y - ip_z z). \quad (2.6)$$

と試しにおいてみよう。 E, p_x, p_y, p_z はクラインゴルドン方程式 (2.4) が満たされるように、このあと選ばよ。さっそく、クラインゴルドン方程式 (2.4) にこの解を代入すると、

$$E^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (2.7)$$

を得る。 p_x, p_y, p_z の値を固定したとき、 E の解は次の2つ。

$$E = \sqrt{m^2 + p^2}, \quad -\sqrt{m^2 + p^2} \quad (2.8)$$

エネルギーが正の解にくわえて、負となる解もある！（あとで分かるように負エネルギー解の存在は、反粒子の存在と関係している）

2.2 確率解釈できるか？

クラインゴルドン方程式に従う ψ は確率解釈できるだろうか？確率が保存しているならば、確率密度 ρ とその流速 \vec{j} が存在して、非相対論的量子力学と同様に次のような確率保存の式を満たす。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (2.9)$$

さて、おもむろに、 ψ を使って ρ と \vec{j} を次のように定義してみよう。

$$\rho = \frac{i}{2m} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right], \quad (2.10)$$

$$\vec{j} = \frac{i}{2m} \left[(\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* (\vec{\nabla} \psi) \right]. \quad (2.11)$$

この ρ と \vec{j} は確率保存の式をみることが、クラインゴルドン方程式を使ってチェックできる。計算してみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{i}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] \\ &= \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \psi \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi \right) \psi^* - \left(\frac{i}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \right) \psi \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

⁴かわりに

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \sqrt{m^2 - \nabla^2} \psi \quad (2.5)$$

とするのはどうか？右辺の演算子は無限階微分をどうしても含んでしまい、non-local な演算子となっていてちょっと使えない。

確かに式 (2.9) が満たされている。

一見良さそうだが、この ρ は、非相対論的な場合 (1.26) と異なり、 $\rho \geq 0$ が保証されていない。(positive-definite ではない、とも言う。) つまり、負になってしまうこともありうる。具体的には $\psi = e^{-iEt}$ みたいな解を考えて E が負だと ρ も負になってしまう。確率が負になってしまったらおかしい。確率密度と解釈するのはなんか無理そう…。

3 ディラック (Dirac) 方程式

シュレーディンガー方程式を手直して次のような条件を満たすようにしたい。

- ローレンツ対称性を保つ。
- 確率解釈ができる波動関数 ψ がある。(クラインゴールドン方程式の場合と違って、非負になることが保証されているような定義の確率密度がほしい。)

前の章では波動関数は一成分としていたが、一般化して n 成分あってもいい。この場合、固有値が全ての正である $n \times n$ エルミート行列 A を使って

$$\rho = \psi^\dagger A \psi. \quad (3.1)$$

と書けたら $\rho \geq 0$ が保証できそう。ここで ψ は成分を n 個並べたもの。ために A を単位行列にしてみよう。⁵そうすると、

$$\rho = \sum_{i=1}^n |\psi_i|^2 \quad (3.2)$$

と書ける。このとき、 ρ の時間微分は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left(\psi_i^* \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \psi_i \frac{\partial \psi_i^*}{\partial t} \right). \quad (3.3)$$

右辺が、なんらかのベクトル \vec{j} を使って、 $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ という形になってほしい。 ψ は時間についての一階微分方程式を満たしてもらおうのがよさそう。きっとこんな形になるはずだ。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (3.4)$$

\hat{H} は空間の一階微分を含む演算子。(一見、シュレーディンガー方程式とほぼ一緒の形だが、 \hat{H} は一階微分しか含まないから、 $H = p^2/2m$ とは違うもの。) さらに、 $E^2 = m^2 + p^2$ の量子論バージョンとして、

$$\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2 \quad (3.5)$$

という関係が成り立ってほしい…。

まとめると、

- $\rho = \psi^\dagger \psi$
- $i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$
- $\hat{H}^2 = m^2 - \vec{\nabla}^2$

を満たしてほしい。

⁵単位行列じゃない場合も ψ を適当に再定義すれば、単位行列にとりなおすことができる。

3.1 \hat{H} を行列にすれば上手くいきそう

特殊相対論では時間と空間はほとんど同等の立場。ということは、 H はきっと空間の一階微分を含むだろう。しかし、適当に

$$\hat{H} = m + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} ??? \quad (3.6)$$

とかやってしまうと、

$$\hat{H}^2 = m^2 + 2m \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 ??? \quad (3.7)$$

みたいな感じになり、どう見ても上手くいっていない。どうしたらいいだろうか？

ディラックは H を行列にした。 $n \times n$ の行列 $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を使って

$$\hat{H} = m\beta - i\partial_x\alpha_x - i\partial_y\alpha_y - i\partial_z\alpha_z \quad (3.8)$$

と書いてみよう。そうすると、みたすべき式 (3.5) は

$$\hat{H}^2 = (m^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2)I \quad (3.9)$$

と書ける。 I は $n \times n$ の単位行列。ここに式 (3.8) の H を代入してみよう。以下のような行列の間の関係式があれば、式 (3.9) は満たされる。

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I, \quad (3.10)$$

$$\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = 0, \quad (3.11)$$

$$\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = 0, \quad (3.12)$$

$$\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z = 0, \quad (3.13)$$

$$\alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0, \quad (3.14)$$

$$\alpha_y\beta + \beta\alpha_y = 0, \quad (3.15)$$

$$\alpha_z\beta + \beta\alpha_z = 0. \quad (3.16)$$

これを満たす解を見つければ、欲しい方程式が手に入るはずだ。

3.2 $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の解

式 (3.14) の両辺左側から α_x を掛けてみよう。

$$\alpha_x^2\beta + \alpha_x\beta\alpha_x = 0. \quad (3.17)$$

次に上の式の両辺のトレースをとり、さらに $\alpha_x^2 = I$ を使って整理すると、

$$\text{tr}\beta = 0. \quad (3.18)$$

$\text{tr}\alpha_x = 0, \text{tr}\alpha_y = 0, \text{tr}\alpha_z = 0$ も同様に示せる。⁶ $\beta^2 = I$ かつ $\text{tr}\beta = 0$ であることから、 β は固有値 $+1$ が n 個、 -1 が n 個の、 $2n \times 2n$ 行列であることが分かる。 $n = 1(2 \times 2$ 行列) では、式 (3.10) から式 (3.16) の全

⁶時間のある人は示してみてください

てを満たすような $\beta, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ の組を上手く見つけられない。⁷ということで、 $n = 2(4 \times 4$ 行列) を考えてみよう。 β を対角化して次の形にとる基底で考えてみる。

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

そうすると、次のような $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を取れば解になっていることが分かる。

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} & \sigma_z \\ \sigma_z & \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

ここで、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ はパウリ (Pauli) 行列。以下で定義される。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

パウリ行列は

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2, \quad (3.22)$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0, \quad (3.23)$$

$$\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 0, \quad (3.24)$$

$$\sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 0. \quad (3.25)$$

を満たす。まとめて

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (3.26)$$

とも書かれる。

例えば、式 (3.14) をチェックしてみよう。

$$\begin{aligned} \alpha_x \beta + \beta \alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -\sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ -\sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

また、式 (3.11) もチェックできる。

$$\begin{aligned} \alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x &= \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \sigma_y \\ \sigma_y & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \sigma_x \\ \sigma_x & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma_z & \\ & i\sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\sigma_z & \\ & -i\sigma_z \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

⁷時間のある人は示してみてください

同様に、式 (3.15)、式 (3.16)、式 (3.12)、式 (3.13) も確かめることができる。⁸

まとめると、次のような方程式が得られた。

ディラック (Dirac) 方程式

$$i\partial_t\psi = (-i\alpha_x\partial_x - i\alpha_y\partial_y - i\alpha_z\partial_z + m\beta)\psi \quad (3.29)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ \sigma_i & \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

ψ は 4 成分。これがディラック (Dirac) 方程式だ。ちなみにディラックによる原論文は [2].

3.3 後々のためディラック方程式ちょっと書き直す

式 (3.29) のままでは、ローレンツ対称性の議論がちょっとやりにくい。空間微分のところには行列が掛かっているのに、時間微分のところには行列が掛かっていない (単位行列が掛かっている) ので、なんとなく時間と空間が対等に扱えているかどうかが見づらい。

この点はちょっとした手直しで改善できる。式 (3.29) の両辺に左から β をかけると、

$$(i\beta\partial_t + i\beta\alpha_x\partial_x + i\beta\alpha_y\partial_y + i\beta\alpha_z\partial_z)\psi = m\psi \quad (3.31)$$

と書ける。

次のような行列 $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ を定義してみよう。

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\gamma^i \equiv \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.33)$$

この行列はガンマ行列、あるいは、ディラック行列などと呼ばれる。このガンマ行列を使うと、アインシュタインの縮約を上手く使えるようになり、ディラック方程式は以下のように書ける。

ディラック (Dirac) 方程式

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0. \quad (3.34)$$

また、式 (3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16) とガンマ行列の定義を使うと、ガンマ行列の反交換関係は、

$$\gamma^0\gamma^0 = \beta^2 = I_4, \quad (3.35)$$

$$\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \beta^2\alpha_i + \beta\alpha_i\beta = \alpha_i - \alpha_i = 0, \quad (3.36)$$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = -2\delta_{ij}. \quad (3.37)$$

⁸時間のある人は示してみてください

この関係式は、メトリックを使ってまとめることができる。

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

簡潔に書けるようになっていい感じ。

3.4 他にも β 、 α_i の解はある

この $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta$ は解のひとつ。適当なユニタリ行列 U を使って、

$$\alpha'_{x,y,z} = U\alpha_{x,y,z}U^\dagger, \quad \beta' = U\beta U^\dagger. \quad (3.39)$$

と定義しても $\alpha'_{x,y,z}$ と β' は同様の関係式を満たす。

例えば、

$$\beta' = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \alpha'_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & \\ & \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

というのも別解になっている。

これを使うと、

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

教科書によって違う定義を使っていたりするので注意が必要。

3.5 連続の方程式をチェックしよう

せっかくディラック方程式が導出できたので、連続の方程式を満たすことを確認しよう。 $\rho = \psi^\dagger \psi$ であることから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger \psi) &= \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi + \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= -i\psi^\dagger(-i\alpha_x \partial_x \psi - i\alpha_y \partial_y \psi - i\alpha_z \partial_z \psi + m\beta\psi) + (i\partial_x \psi^\dagger \alpha_x + i\partial_y \psi^\dagger \alpha_y + i\partial_z \psi^\dagger \alpha_z + m\psi^\dagger \beta)\psi \\ &= -\partial_x(\psi^\dagger \alpha_x \psi) - \partial_y(\psi^\dagger \alpha_y \psi) - \partial_z(\psi^\dagger \alpha_z \psi) \end{aligned} \quad (3.42)$$

ということで、

$$\vec{j} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \quad (3.43)$$

と定義すれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (3.44)$$

が成り立つ。連続の式が成り立っている。うれしい！

3.6 ディラック方程式の平面波解

ディラック方程式の解にはどんなものがあるのだろうか。平面波解を求めてみよう。 z 軸方向に運動量を持つと仮定して、次のような形を考えてみる。

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \exp(ip_z z - iEt). \quad (3.45)$$

u_1, u_2, u_3, u_4 は、ディラック方程式を満たすように決める必要がある。上の形をディラック方程式 (3.29) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} -E + m & & p_z & \\ & -E + m & & -p_z \\ p_z & & -E - m & \\ & -p_z & & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.46)$$

がえられる。上の形をディラック方程式 (3.34) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} E - m & & -p_z & \\ & E - m & & p_z \\ p_z & & -E - m & \\ & -p_z & & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.47)$$

がえられる。 $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ はいつでも解になるけど、当然そうじゃない解が欲しい！そのためには左辺にかかっている 4×4 行列の行列式が 0 にならないといけない。行列式は、

$$(E^2 - m^2 - p_z^2)^2 \quad (3.48)$$

なので、

$$E^2 - m^2 - p_z^2 = 0. \quad (3.49)$$

を満たす必要がある。これを E についてとくと、

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p_z^2}. \quad (3.50)$$

エネルギーが正になる解と負になる解の二種類がある！

まず、正のエネルギー解 ($E = +\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$p_z u_1 - (E + m)u_3 = 0, \quad (3.51)$$

$$-p_z u_2 - (E + m)u_4 = 0 \quad (3.52)$$

を解くと、

$$\psi = \left[u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_z/(E + m) \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -p_z/(E + m) \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.53)$$

u_1 と u_2 は好きな値にとれるので、独立な解が2つある！

運動量がエネルギーに比べて小さい極限、 $p_z \ll E$ を考えてみよう。このとき、 $E = \sqrt{m^2 + p_z^2}$ なので、 $E \sim m$ かつ、 $p_z \ll m$ 。運動エネルギーが静止質量エネルギーと比較して無視できる。

$$\frac{p_z^2}{2m} \ll m \quad (3.54)$$

こういう極限は、「非相対論的な極限」と呼ばれる。これまでに習った量子力学に近づいていく極限。この極限で、

$$\psi \simeq \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.55)$$

ということで、非相対論的極限でも2つの自由度は残る。これがスピンの自由度。なんでスピンと言えるのか詳しくは後でみる。

同様に、負のエネルギー解 ($E = -\sqrt{m^2 + p_z^2}$) について考えてみよう。

$$-(|E| + m)u_1 - p_z u_3 = 0, \quad (3.56)$$

$$-(|E| + m)u_2 + p_z u_4 = 0 \quad (3.57)$$

今度は u_3, u_4 について解いてみよう。

$$\psi = \left[u_3 \begin{pmatrix} -p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ p_z/(E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \exp(ip_z z - iEt) \quad (3.58)$$

u_3 と u_4 は好きな値にとれるので、この場合も独立な解が2つある！

結局、同じ p_z の値に対して、正のエネルギー解は2つ、負のエネルギー解が2つ、の合計4つの解が現れた。それぞれ、どういった意味を持つか考えていこう。

3.7 ディラック (Dirac) の海、反粒子

エネルギーの低い準位があるとエネルギーを放出して遷移が起きる（例：水素原子の $n = 2$ から $n = 1$ への遷移に伴う Lyman α 線の放出、など）。負のエネルギー解があるので、そっちに遷移していつてしまう？しかも、エネルギーに下限がない！電子が安定に存在できなくなるのではないか…。

Dirac はこの問題を次のように考えることで回避することを提案した。

- 「真空」では $E = -m$ から $-\infty$ までのすべての負エネルギー状態が完全に満員になっている。
- 真空状態の負エネルギー電子は、観測可能量に影響しない。真空からのズレのみが観測される。

フェルミオンには排他律があるので、同じ準位にはひとつの粒子しか入ることはできない。ひとつめの仮定により、正のエネルギーを持った粒子がエネルギーを放出して、負のエネルギーに落ち込むことはなくな

る。つまり、系が安定して存在できることになる。実際、負のエネルギー準位を占める電子がいた方がエネルギーが下げられるので、負のエネルギー準位が満員になっている状態は最もエネルギーの低い状態とみなせる。ということで、「真空」がこのようなものであると考えるのは自然だ。これは、Dirac の海 (Dirac sea)、と呼ばれている。

電子がひとついる状態は、正のエネルギー準位を占める粒子がひとついる状態。確かに真空に比べてエネルギーが増加している。負のエネルギー準位から粒子をひとつ抜いてみよう。空孔 (hole) ができる。この状態も真空よりエネルギーが高い。負電荷を持つ粒子が一ついなくなったので、真空に比べて電荷が +1 増加した。これは電荷が正の粒子がひとついる状態と解釈できる。このようにディラック方程式を考えると電荷の値が正反対の粒子の存在が必然的に示唆される。このような粒子は反粒子と呼ばれる。電子に対応する反粒子は陽電子 (positron) と呼ばれる。

正のエネルギーを持つ電子が、エネルギーを放出して、負のエネルギー準位の空孔に落ち込んだ状況を考えてみよう。これは、電子と陽電子が消えてしまいエネルギーに変わった状況とみなせる。これは対消滅 (annihilation) とよばれる。逆に、外からエネルギーを与えて、負のエネルギー準位を埋めている電子を正のエネルギー準位に励起させてみよう。これは、エネルギーが電子と陽電子に変わったとみなすことができる。これを対生成 (pair creation) と呼ぶ。(この状況をきちんと記述するには、電子と光子などの相互作用を入れる必要があるので、場の量子論が必要。)

[3]

3.8 積み残した疑問

まだ答えてない疑問が残っている。

- なぜ正エネルギーと負エネルギーの解がそれぞれ2つずつ？
- ローレンツ不変にちゃんとなっているの？

次の章で議論するよ！

4 ローレンツ変換とディラック方程式

特殊相対論をやっているので、座標系に依らず物理法則が同じ、ということを要請したい。これはつまり、 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ という座標間のローレンツ変換が与えられたとき、 x' 座標でも x 座標でも “同じ形” の方程式が成立してほしい、ということの意味する。

“同じ形” の方程式が成立する様子を、クラインゴールドン方程式とマクスウェル方程式を例にみてみよう。さらに、ディラック方程式にもこの性質を要求することで、スピノルというものが現れるものをみる。結果、ディラック方程式にスピンという概念が自然に導入されることをみる。

4.1 方程式とローレンツ変換

どの座標系で見ても、物理法則が一緒。つまり、“同じ” 方程式が成立する。場や方程式がローレンツ変換に対してどのように振る舞うか、クラインゴールドン方程式とマクスウェル方程式を例に見る。そして、ディラック方程式についても議論する。前の章で出てきた4成分の ψ が、スカラーでもない、ベクトルでもない、テンソルでもない。スピノルであることを見る。

4.1.1 反変ベクトル、共変ベクトル、テンソル

x 座標から x' 座標へのローレンツ変換は以下のように定義された。

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (4.1)$$

ただし、

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \quad (4.2)$$

ローレンツ変換にしたがって、

$$A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} \quad (4.3)$$

と変換されるものを反変ベクトルと呼ぶ。反変ベクトルを2つもってきて、メトリックで足をつぶすと定義によりローレンツ不変。

$$g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu\nu} A'^{\mu} B'^{\nu} \quad (4.4)$$

メトリックで足をつぶしたら、添字を挙げたり下げたりしておくのが便利。

$$A_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}. \quad (4.5)$$

ただし、

$$g^{\mu\nu} \equiv (g^{-1})_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (4.6)$$

下付き添字のベクトル A_{μ} は共変ベクトルと呼ばれる。添字の上付き下付きは、ローレンツ変換でどう変換されるかを明示する便利なルール。

共変ベクトルの変換則を求めてみよう。共変ベクトルと反変ベクトルの内積がローレンツ不変なことから、

$$\begin{aligned} A^{\mu} B_{\mu} &= A'^{\mu} B'_{\mu} \\ A^{\mu} B_{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu} B'_{\mu} \end{aligned} \quad (4.7)$$

なので、

$$B_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} B'_{\mu}. \quad (4.8)$$

$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta}$ の両辺に $g^{\lambda\alpha}$ かけてみる。

$$\delta^{\lambda}_{\alpha} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\lambda} \quad (4.9)$$

なので、

$$\Lambda_{\mu}^{\lambda} = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\alpha} \quad (4.10)$$

これを使うと、

$$\begin{aligned} B_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} &= B'_{\mu} \\ \Lambda_{\mu}^{\nu} B_{\nu} &= B'_{\mu} \end{aligned} \quad (4.11)$$

まとめると、上付き添字の反変ベクトルと、下付き添字の共変ベクトルのローレンツ変換は、

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu, \quad (4.12)$$

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = \Lambda_\mu^\nu B_\nu. \quad (4.13)$$

添字がたくさんあったら、こう！

$$T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} \rightarrow T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\beta_n} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \quad (4.14)$$

添字が2つ以上あると、テンソル、と呼ばれるようになる。

これがローレンツ不変になる。

$$T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m} A^{\nu_1} \dots A^{\nu_n} B_{\mu_1} \dots B_{\mu_m} \quad (4.15)$$

微分演算子は共変ベクトルになる！

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (4.16)$$

ローレンツ変換から、確かに下付き添字にしておくのが正しいのを確認しておこう。微分の定義により、

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu = \partial_\nu \quad (4.17)$$

なので、

$$\partial'_\mu \Lambda^\mu_\nu = \partial_\nu \quad (4.18)$$

逆行列かけて、

$$\partial'_\mu \Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda \quad (4.19)$$

ということで、

$$\partial'_\lambda = \Lambda_\lambda^\nu \partial_\nu \quad (4.20)$$

下付き添字にしといて OK なことが確認できた。

4.1.2 クラインゴールドン方程式

クラインゴールドン方程式がローレンツ変換でどう振る舞うか詳しくみてみよう。微分演算子もテンソルっぽく書けたので、クラインゴールドン方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x) = (\partial^2 + m^2) \phi(x) = 0 \quad (4.21)$$

といういい感じで書けるようになった。ここで $\partial^2 \equiv g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ 。

x' 座標で ϕ はどういう値になるだろう。よくわかんないけど、物理的に同じ点を見れば x 座標でみた時と同じ値になってる気がする………なので、いったん、

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (4.22)$$

としてみよう。これを認めると、 x' 座標でも、同じ形の方程式が成立することを見てみよう。

$$\begin{aligned}(g^{\mu\nu}\partial'_\mu\partial'_\nu - m^2)\phi'(x') &= (g^{\mu\nu}\Lambda_\mu^\alpha\Lambda_\nu^\beta\partial_\alpha\partial_\beta - m^2)\phi(x) \\ &= (g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta - m^2)\phi(x) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

確かに

$$(\partial'^2 + m^2)\phi' = 0\tag{4.24}$$

が成立する！ x 座標でも x' 座標でも「物理法則が同じ」と言えそう。

4.1.3 マックスウェル (Maxwell) 方程式を特殊相対論っぽく書く

マックスウェル方程式を思い出してみよう。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0,\tag{4.25}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}.\tag{4.26}$$

真空中の誘電率と透磁率は1に取った。式(4.25)を満たすような電場と磁場は、スカラーポテンシャル $\phi(t, \vec{x})$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}(t, \vec{x})$ を導入することにより、(少なくとも局所的に) 次のように書ける。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\tag{4.27}$$

ρ と \vec{j} を ϕ と \vec{A} で書いてみよう。

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho,\tag{4.28}$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \vec{j}.\tag{4.29}$$

$\nabla \times (\nabla \times A) = -\nabla^2 A + \nabla(\nabla A)$ を使った。もうちょつと整理すると、

$$-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \rho,\tag{4.30}$$

$$-\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \vec{j}.\tag{4.31}$$

4元電流ベクトルを定義しよう。

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}).\tag{4.32}$$

式(4.30)と式(4.31)の右辺は四元ベクトルの成分なので、 ϕ と \vec{A} から、

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}).\tag{4.33}$$

という四元ベクトルが定義できそうだ。式(4.30)と式(4.31)は一本にまとめられる。

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\nu\tag{4.34}$$

実は電場と磁場は

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.35)$$

の成分であることが分かる。計算してみると、

$$F^{01} = \dot{A}_x + \partial_x \phi = -E_x, \quad (4.36)$$

$$F^{02} = \dot{A}_y + \partial_y \phi = -E_y, \quad (4.37)$$

$$F^{03} = \dot{A}_z + \partial_z \phi = -E_z, \quad (4.38)$$

$$F^{12} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z, \quad (4.39)$$

$$F^{23} = -\partial_y A_z + \partial_z A_y = -B_x, \quad (4.40)$$

$$F^{31} = -\partial_z A_x + \partial_x A_z = -B_y \quad (4.41)$$

マックスウェル方程式もあらわにチェックできる。

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho, \quad (4.42)$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^1, \quad (4.43)$$

$$\partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} = j^2, \quad (4.44)$$

$$\partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} = j^3 \quad (4.45)$$

ということで、式 (4.26) は次のようにまとめられる。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (4.46)$$

また、式 (4.25) を次のように書き直すこともできる。

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (4.47)$$

4 元ベクトルポテンシャルのローレンツ変換は、

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (4.48)$$

電磁場のローレンツ変換は、

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x) \quad (4.49)$$

x 座標では

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0. \quad (4.50)$$

が成立していた。 x' 座標では、

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = j'^\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial'_\mu F'_{\nu\lambda} = 0. \quad (4.51)$$

が成立する！

4.1.4 ディラック方程式はどう？

ローレンツ変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ を考えた時、 x' 座標でも、ディラック方程式 (3.34) が成立してほしい：

$$(i\partial'_{\mu}\gamma^{\mu} - m)\psi'(x') = 0. \quad (4.52)$$

スカラー場の場合は $\phi'(x') = \phi(x)$ だったし、電磁場に関しては $A'_{\mu}(x') = \Lambda^{\nu}_{\mu} A_{\nu}(x)$ となっていた。 $\psi'(x')$ と $\psi(x)$ とは、どういう関係にあるだろうか？

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x). \quad (4.53)$$

のように線形変換で関係づけられるとしよう。ここで $U(\Lambda)$ はローレンツ変換 Λ ごとに決まる 4×4 行列。

$$\begin{aligned} (i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi' &= (i\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu} - m)U(\Lambda)\psi \\ &= i\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}\partial_{\nu}U(\Lambda)\psi - U(\Lambda)i\gamma^{\mu}\partial^{\mu}\psi \\ &= U(\Lambda)[U(\Lambda)^{-1}i\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}U(\Lambda)\psi - i\gamma^{\nu}]\partial_{\nu}\psi. \end{aligned} \quad (4.54)$$

ということで、式 (3.34) と式 (4.52) が同時に満たされると要求すると、

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}U(\Lambda)^{-1} &= \gamma^{\nu} \\ U(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}_{\mu}U(\Lambda)^{-1}\Lambda^{\rho}_{\nu} &= \Lambda^{\rho}_{\nu}\gamma^{\nu} \\ U(\Lambda)\gamma^{\mu}U(\Lambda)^{-1} &= \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

ということで、ガンマ行列 γ^{μ} と $U(\Lambda)$ が次のような関係を満たしていればよいことが分かった。

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}. \quad (4.56)$$

相対論で出てくる量は、ローレンツ変換のもとでどう振る舞うかで名前がついていた。

- スカラー： $\phi'(x') = \phi(x)$
- ベクトル： $p'_{\mu}(x') = \Lambda^{\nu}_{\mu} p_{\nu}(x)$
- テンソル： $F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta}(x)$

結局、 μ の足が 0 個か、1 個か、2 個以上かの分類だった。

ψ はスカラーでもベクトルでもテンソルでもない。ではなんだと…。 ψ はスピノルと呼ばれている。

- スピノル： $\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x)$

4.2 スピノルの無限小ローレンツ変換

Λ が与えられたとき、式 (4.56) をみたすような $U(\Lambda)$ を見つけるのが目標。とりあえず、無限小ローレンツ変換について考えてみよう。無限小ローレンツ変換とはほぼほぼ恒等変換の変換。ちゃんというと、

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu} \quad (4.57)$$

と書いて、 $|\omega^{\mu}_{\nu}| \ll 1$ をみたすようなもの。この無限小に対する適切な $U(\Lambda)$ を探す。

4.2.1 無限小ローレンツ変換の性質

式 (1.16) ($g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$) の両辺の ω の一次の項を比較すると、

$$g_{\mu\alpha}\omega^\mu_\nu g^\alpha_\beta + g_{\mu\alpha}g^\mu_\nu\omega^\alpha_\beta = 0 \quad (4.58)$$

となり、整理すると、

$$\omega_{\beta\nu} = -\omega_{\nu\beta} \quad (4.59)$$

が得られる。つまり、無限小ローレンツ変換は、2つの添字を持つ反対称テンソルで指定できる。このテンソルの独立な成分の数は、

$$\frac{4 \times 3}{2} = 6 \quad (4.60)$$

となり、6成分だ。あらわに書くとこんな感じ。

$$\omega^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \eta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \eta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$\omega_{1,2,3}$ は x, y, z 軸方向のローレンツブースト、 $\theta_{1,2,3}$ は空間の回転の自由度に対応する。

4.2.2 無限小ローレンツ変換に対応する $U(\Lambda)$

次に無限小ローレンツ変換に対する $U(\Lambda)$ の形を考察してみよう。恒等変換 ($\Lambda = 1$ もしくは $\delta\omega_{\mu\nu} = 0$) に対し、 $U(\Lambda) = I_4$ なので、 $U(\Lambda)$ を $\delta\omega$ の一次の項まで残すと、

$$U(\Lambda) = I_4 - \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (4.62)$$

と書けるはず。ここで、 $\sigma^{\mu\nu}$ は各 μ, ν の組み合わせに対して決まる 4×4 行列。さきに見たように、 $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$ なので $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ としよう。

式 (4.56) の両辺はそれぞれ、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} \text{(式 (4.56) の左辺)} &\simeq \left(I_4 + \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \gamma^\mu \left(I_4 - \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \right) \\ &\simeq \gamma^\mu + \frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\gamma^\mu - \frac{i}{4}\gamma^\mu\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\text{(式 (4.56) の右辺)} \simeq \gamma^\mu + \delta\omega^\mu_\nu\gamma^\nu \quad (4.64)$$

ということで、式 (4.56) の両辺を比較すると、

$$\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = \omega_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta \quad (4.65)$$

$\omega_{\alpha\beta}$ の係数を比較したいが、このままでは上手くいかない。左辺の $\omega_{\alpha\beta}$ の係数は、 α と β の入れ替えに対して反対称なテンソルだが、右辺はそうになっていない。 $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ を用いて、上の式の右辺をちよつとお直しする。

$$\begin{aligned}
\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] &= \omega_{\alpha\beta}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta \\
&= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^\alpha \right) \\
&= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta + \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^\alpha \right) + \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^\alpha \right) \\
&= \omega_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - \frac{1}{2}g^{\mu\beta}\gamma^\alpha \right) \tag{4.66}
\end{aligned}$$

これで、両辺の $\omega_{\alpha\beta}$ の係数が、どちらも α と β の入れ替えに対して反対称なテンソルとなった。両辺比較すると、

$$[\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = -2ig^{\mu\alpha}\gamma^\beta + 2ig^{\mu\beta}\gamma^\alpha \tag{4.67}$$

これが $\sigma^{\mu\nu}$ の満たすべき式。

実は、式 (4.67) を満たす $\sigma^{\alpha\beta}$ はガンマ行列を使って、

$\sigma^{\mu\nu}$ のかたち

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{4.68}$$

と書ける！これが確かに式 (4.67) の解であることをチェックしてみよう。式 (3.38) を用いて、評価していく。

$$\begin{aligned}
\text{(式 (4.67) の左辺)} &= \frac{i}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu - \frac{i}{2}\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu - \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta + \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha \\
&= \frac{i}{2}\gamma^\alpha(2g^{\beta\mu} - \gamma^\mu\gamma^\beta) - \frac{i}{2}\gamma^\beta(2g^{\alpha\mu} - \gamma^\mu\gamma^\alpha) - \frac{i}{2}(2g^{\alpha\mu} - \gamma^\alpha\gamma^\mu)\gamma^\beta + \frac{i}{2}(2g^{\beta\mu} - \gamma^\beta\gamma^\mu)\gamma^\alpha \\
&= 2ig^{\mu\beta}\gamma^\alpha - 2ig^{\mu\alpha}\gamma^\beta \tag{4.69}
\end{aligned}$$

ということで確かにみたされていることが分かった。

$\sigma^{\alpha\beta}$ を式 (3.41) の γ^μ の定義を使って書くと、

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

$$\sigma^{0i} = -\sigma^{i0} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.71}$$

4.3 スピノルの有限ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換について式 (4.56) がみたされるようにした。

$$\left[\frac{i}{4}\delta\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^\mu \right] = \delta\omega^\mu_\nu\gamma^\nu \tag{4.72}$$

それはいいけど、ちゃんと有限のローレンツ変換についても式 (4.56) ってみたされるの？

ローレンツ変換に続けて微小ローレンツ変換をやると、ちょびっと違うローレンツ変換ができる。

$$\Lambda'^{\mu}_{\nu} = (\delta^{\mu}_{\lambda} + \omega^{\mu}_{\lambda})\Lambda^{\lambda}_{\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.73)$$

差分に書き直すとこんな感じ。

$$\Lambda'^{\mu}_{\nu} - \Lambda^{\mu}_{\nu} = \omega^{\mu}_{\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\nu} + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.74)$$

ということで、ローレンツ変換に対する微分方程式ができる。

$$\frac{d}{d\tau}\Lambda^{\mu}_{\nu}(\tau) = \omega^{\mu}_{\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\nu}(\tau) \quad (4.75)$$

これにより、連続パラメータ τ でパラメトライズできる一連のローレンツ変換ができる。この微分方程式の解は、

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}_{\nu} &= [\exp(\tau\omega)]^{\mu}_{\nu} \\ &= \delta^{\mu}_{\nu} + \tau\omega^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\tau^2\omega^{\mu}_{\lambda}\omega^{\lambda}_{\nu} + \dots \end{aligned} \quad (4.76)$$

みたいな感じで指数関数にまとまる。

$U(\Lambda)$ も指数関数で

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right). \quad (4.77)$$

とかける。これが、式 (4.56) をみたすことを確認するには、この公式も便利だよ。⁹

$$Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \dots = e^{-X}Y e^X \quad (4.78)$$

ためしに、 z 軸まわりの回転と z 軸方向のローレンツブーストについて、 $U(\Lambda)$ を計算してみよう。

4.3.1 z 軸まわりの回転

まず Λ^{μ}_{ν} を指数関数の形から評価してみよう。 z 軸まわりに角度 θ 回転させると、

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}_{\nu} &= \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.79)$$

⁹いわゆる Campbell-Baker-Hausdorff の公式。http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akio.tomiya/filebox/Campbell-Baker-Hausdorff.pdf を参照のこと。

ちなみに、ほぼ同じ計算を量子力学で回転群やったときにやってるはずだ。ということで、こういう関係が成立しているはずだ。

$$\Lambda^0{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^0, \quad (4.80)$$

$$\Lambda^1{}_\nu \gamma^\nu = \cos \theta \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2, \quad (4.81)$$

$$\Lambda^2{}_\nu \gamma^\nu = -\sin \theta \gamma^1 + \cos \theta \gamma^2, \quad (4.82)$$

$$\Lambda^3{}_\nu \gamma^\nu = \gamma^3. \quad (4.83)$$

さて、 $U(\Lambda)$ を評価してみよう。

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) = \exp(i\theta\sigma_{12}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & & & \\ & e^{-i\theta/2} & & \\ & & e^{i\theta/2} & \\ & & & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda)\gamma^1 U(\Lambda) &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & & & \\ & e^{i\theta/2} & & \\ & & e^{-i\theta/2} & \\ & & & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & & & \\ & e^{-i\theta/2} & & \\ & & e^{i\theta/2} & \\ & & & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & & e^{-i\theta} \\ & & e^{i\theta} & \\ & -e^{-i\theta} & & \\ -e^{i\theta} & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & & \cos \theta - i \sin \theta \\ & & \cos \theta + i \sin \theta & \\ & -\cos \theta + i \sin \theta & & \\ -\cos \theta - i \sin \theta & & & \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta \gamma^1 + \sin \theta \gamma^2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

式 (4.81) がチェックできた。やったね。式 (4.82) も同じような計算でチェックできるし、 $U(\Lambda)$ は γ^0, γ^3 と交換するので式 (4.80, 4.83) も成り立つ。¹⁰

¹⁰時間のある人は示してみてください

4.3.2 z 軸方向のブースト

z 軸方向のブーストも計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\Lambda^\mu_\nu &= \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\eta + \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^5}{5!} + \dots \right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + \dots \right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \eta & & & \sinh \eta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \sinh \eta & & & \cosh \eta \end{pmatrix} \tag{4.86}
\end{aligned}$$

ちなみに、 η は擬ラピディティ (pseudo-rapidity) とか呼ばれたりするパラメーター。ということで、こういう関係が成立しているはずだ。

$$\Lambda^0_\nu \gamma^\nu = \cosh \eta \gamma^0 + \sinh \eta \gamma^3, \tag{4.87}$$

$$\Lambda^1_\nu \gamma^\nu = \gamma^1, \tag{4.88}$$

$$\Lambda^2_\nu \gamma^\nu = \gamma^2, \tag{4.89}$$

$$\Lambda^3_\nu \gamma^\nu = \sinh \eta \gamma^0 + \cosh \eta \gamma^3 \tag{4.90}$$

さて、 $U(\Lambda)$ を評価してみよう。

$$U(\Lambda) = \exp \left(-\frac{i}{4} \delta\omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) = \exp(i\eta\sigma_{03}) = \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & \sinh \eta/2 & \\ & \cosh \eta/2 & & -\sinh \eta/2 \\ \sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 & \\ & -\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)^{-1} \gamma^0 U(\Lambda) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & & -\sinh \eta/2 & +\sinh \eta/2 \\ -\sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & +\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \sinh \eta/2 & -\sinh \eta/2 \\ \sinh \eta/2 & -\sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 & -\sinh \eta/2 & +\sinh \eta/2 \\ -\sinh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 \\ & +\sinh \eta/2 & & \cosh \eta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \eta/2 & \cosh \eta/2 & \sinh \eta/2 & -\sinh \eta/2 \\ -\sinh \eta/2 & \sinh \eta/2 & -\cosh \eta/2 & -\cosh \eta/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & & y & \\ -y & x & -x & -y \\ & y & & -x \end{pmatrix} \tag{4.92}
\end{aligned}$$

$x = \cosh^2 \eta/2 + \sinh^2 \eta/2 = \cosh \eta$ と $y = 2 \sinh \eta \cosh \eta = \sinh \eta$ ということで、

$$U(\Lambda)^{-1} \gamma^0 U(\Lambda) = \cosh \eta \gamma^0 + \sinh \eta \gamma^3 \tag{4.93}$$

式 (4.87) が確かに満たされている。式 (4.88, 4.89, 4.90) もチェックできる。¹¹
 というわけで、たしかに

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\omega)]^\mu{}_\nu \quad (4.94)$$

に対し、

$$U(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) \quad (4.95)$$

とおくと、

$$U(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \quad (4.96)$$

(式 (4.56)) が満たされているのが確かにチェックできる。

4.4 スピン

同じ座標における波動関数を比較してみよう。ローレンツスカラーの ϕ について、

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) \\ &\simeq \phi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu) \\ &\simeq \phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \\ &\simeq \phi(x) - \omega_{\mu\nu} x^\nu \partial^\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (4.98)$$

特に z 軸まわりの微小回転を考えてみたい。 $\omega_{12} = -\omega_{21} = -\theta$ とすると、

$$\begin{aligned} \phi'(x) - \phi(x) &\simeq \theta \times -(x^1\partial^2 - x^2\partial^1)\phi \\ &\simeq \theta \times i(ix^1\partial^2 - ix^2\partial^1)\phi \end{aligned} \quad (4.99)$$

角運動量演算子が出てきたのがわかる。

スピノルについても同じ計算をやってみよう。

$$\psi'(x') = U(\Lambda)\psi(x), \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= U(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x), \\ &\simeq \left(I_4 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu), \\ &\simeq \psi(x) + \left(-\omega^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(x) \\ &\simeq \psi(x) + \omega_{\mu\nu} \left(-x^\nu \partial^\mu - \frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi(x) \end{aligned} \quad (4.101)$$

¹¹時間のある人は示してみてください

$$\psi'(x) - \psi(x) \simeq \theta \times i \left(ix^1 \partial^2 - ix^2 \partial^1 + \frac{1}{2} \sigma^{12} \right) \psi \quad (4.102)$$

微分が入っている項は軌道角運動量と解釈できる。 σ^{12} も角運動量。これがスピン。

$$\frac{1}{2} \sigma^{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

この形を見ると c_1 成分と c'_1 は $J_z = +1/2$ を持ち、 c_2 成分と c'_2 成分は $J_z = -1/2$ を持つことが分かる。特に、静止している ($p_z = 0$) 解を考えたとしても角運動量を持っていることが分かり、これはスピン角運動量と解釈できる。つまり、ディラック方程式はスピン $1/2$ を表すことができている！

5 ローレンツ群についてもっと

前の章でスピノルというのをみた。目新しいが所詮はただのローレンツ群の表現に過ぎない。せっかくなので、もうちょっと一般化してローレンツ群の表現を少し勉強しておこう。スカラー、ベクトル、テンソル、そしてスピノルなどがどういったものか整理することができるだろう。

5.1 群とか表現とか Lie 代数とか：回転群の代数とスピンの復習

群とか表現とか代数ってなんだっけ。回転群とスピンについて復習してみよう。ローレンツ群は回転群と似てるので、良い比較例になっている。

5.1.1 群

まず、群とは次のような性質をみたす元の集合 G

- 積 $g_1 g_2$ が定義されている
- 単位元 e が存在する
- 各元に逆元 g^{-1} が存在する
- 積に対して結合則が成立する $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$

三次元空間の回転は、 3×3 行列 R を使って、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

と書ける。原点からの距離が不変 ($\vec{x}^2 = \vec{x}'^2$) を要求すると、 R は

$$R^T R = I_3 \quad (5.2)$$

を満たさなければならない、実直交行列であることが分かる。

行列の積演算の性質から、あきらかに直交行列の集合は上の群の四条件をみたしている。回転のなす群は回転群とよばれる。 $SO(3)$ とも呼ばれる。回転群は Lie 群の一例。

5.1.2 Lie 代数

無限小回転を議論してみよう。直交行列 R を

$$R = I + \delta \quad (5.3)$$

と書いてみる。直交行列であるという条件 $RR^T = I$ を δ 無限小として展開する。両辺の δ の一次の項だけ比較すると、次の関係式をえる。

$$\delta^T + \delta = 0. \quad (5.4)$$

このような δ の一般的な解は、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ という 3 つのパラメーターを使って

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

と書ける。 J_1, J_2, J_3 は次のように定義された 3×3 行列を定義してみよう。

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

これを使うと δ は簡単に書ける。

$$\delta = i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3 \quad (5.7)$$

J_1, J_2, J_3 は回転群の生成子と呼ばれる。有限の回転も生成子を使って書ける。(無限小とは限らない) $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を使って、直交行列 R を

$$R = \exp(i\theta_1 J_1 + i\theta_2 J_2 + i\theta_3 J_3) \quad (5.8)$$

と書くことができる。

J_1, J_2, J_3 は次の交換関係を満たす。

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \quad [J_2, J_3] = iJ_1, \quad [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (5.9)$$

この交換関係が超重要。これは Lie 代数とよばれるものの一例になっている。

- ベクトル空間。足し算とスカラー倍が定義されている。
- 双線形な演算 $[\cdot, \cdot]$ が定義されている。
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- Jacobi 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

5.1.3 表現

さて、一般に式 (5.9) のような交換関係をみたと、 $n \times n$ 行列の 3 つ組のセットは多数存在する。例えば、

$$[J'_1, J'_2] = iJ'_3, \quad [J'_2, J'_3] = iJ'_1, \quad [J'_3, J'_1] = iJ'_2. \quad (5.10)$$

を満たす $n \times n$ 行列の J'_1, J'_2, J'_3 があれば、

$$R' = \exp(i\theta_1 J'_1 + i\theta_2 J'_2 + i\theta_3 J'_3) \quad (5.11)$$

によって n 個の数字の組が回転によって変換されているとみなせる。このような R' のバリエーションは結局、回転群の代数を満たす行列のセットで決まっている。

一般にある群 G の各元に対して $n \times n$ 行列 $D(g)$ が対応して、

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1g_2), \quad (5.12)$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}, \quad (5.13)$$

$$D(e) = 1_n \quad (5.14)$$

を満たすとき、 $D(g)$ を表現行列という。

さて、回転群の表現行列を考えると、無限小回転から生成子が出てきたので、生成子も行列として書くことができる。次のような行列を定義してみよう。

$$J_+ \equiv J_1 + iJ_2, \quad J_- \equiv J_1 - iJ_2 \quad (5.15)$$

容易に次の交換関係がチェックできる。

$$[J_3, J_+] = J_+, \quad [J_3, J_-] = -J_-. \quad (5.16)$$

J_3 の固有ベクトル v について、

$$J_3 v = \lambda v. \quad (5.17)$$

$J_+ v$ と $J_- v$ に J_3 を作用させてみよう。

$$J_3(J_+ v) = (J_+ J_3 + J_+)v = (\lambda + 1)J_+ v, \quad (5.18)$$

$$J_3(J_- v) = (J_- J_3 + J_-)v = (\lambda + 1)J_- v. \quad (5.19)$$

J_+ と J_- はそれぞれ、 J_3 の固有値を 1 増やしたり 1 減らしたりする。

表現が有限次元であることから、 J_3 の固有値には最大値 λ_{\max} と最小値 λ_{\min} が存在する。その固有ベクトル v_{\max} と v_{\min} は

$$J_+ v_{\max} = 0, \quad J_- v_{\min} = 0. \quad (5.20)$$

を満たす。(右辺が 0 じゃないと固有値 $\lambda_{\max} + 1$ もしくは $\lambda_{\min} - 1$ の固有ベクトルが作れてしまうので矛盾する。)

代数から次の関係式が作れる。

$$J_- J_+ = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_3^2 - J_3, \quad (5.21)$$

$$J_+ J_- = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) - J_3^2 + J_3. \quad (5.22)$$

これを用いて、以下が示せる。

$$J_- J_+ v_{\max} \Rightarrow (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) v_{\max} = \lambda_{\max}(\lambda_{\max} + 1) v_{\max}, \quad (5.23)$$

$$J_+ J_- v_{\min} \Rightarrow (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) v_{\min} = \lambda_{\min}(\lambda_{\min} - 1) v_{\min}. \quad (5.24)$$

ある整数 n を使って、

$$(J_-)^n v_{\max} \propto v_{\min} \quad (5.25)$$

と書けるとしよう。(既約表現に興味がある!) すると、

$$\lambda_{\min} = \lambda_{\max} - n \quad (5.26)$$

であり、

$$[J_{\pm}, J_1^2 + J_2^2 + J_3^2] = 0 \quad (5.27)$$

を使うと、

$$\lambda_{\max}(\lambda_{\max} + 1) = \lambda_{\min}(\lambda_{\min} - 1) \quad (5.28)$$

代入して整理すると、

$$(n - 2\lambda_{\max})(n + 1) = 0 \quad (5.29)$$

n は自然数なので、結局、以下を得る。

$$n = 2\lambda_{\max}, \quad \lambda_{\min} = -\lambda_{\max}. \quad (5.30)$$

こんな感じでスピン $j (= \lambda_{\max})$ の表現が得られるのが分かる。

スピン j の表現について、 J_3 を対角化する基底をとってみよう。

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & & & \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & j \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

$J_3 = j$ の成分について $J_- J_+ = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 - J_3^2 - J_3 = 0$ であることと、 $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ は J_{\pm} と可換であることから、

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \begin{pmatrix} j(j+1) & & & \\ & j(j+1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & j(j+1) \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

5.2 ローレンツ群の代数

さて、回転群について復習したところで、ローレンツ群について勉強してみよう。まずは、無限小ローレンツ変換からローレンツ群の代数をみてみよう。

回転群でやった議論をローレンツ群にも適用してみよう。

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (5.38)$$

Λ^{μ}_{ν} は次のような性質をみたらす。

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \quad (5.39)$$

ローレンツ変換の行列を $\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}$ と分解してみよう。 δ が無限小とすると、次の関係式を得る。

$$g_{\mu\alpha} \omega^{\mu}_{\beta} + g_{\mu\beta} \omega^{\mu}_{\alpha} = 0. \quad (5.40)$$

[式 (5.4) と式 (5.40) を比較]

一般解は 6 つのパラメーターを使って次のように書ける。

$$\omega^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \eta_1 & 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ \eta_2 & -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \eta_3 & \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

[式 (5.5) と式 (5.41) を比較]

以下のように分解できる。

$$\omega^{\mu}_{\nu} = i \sum_{k=1}^3 \theta_k (J_k)^{\mu}_{\nu} + i \sum_{k=1}^3 \eta_k (K_k)^{\mu}_{\nu} \quad (5.42)$$

[式 (5.7) と式 (5.42) を比較]

J_i は回転の生成子。 K_i は i 軸方向のローレンツブーストの生成子。具体的に書いてみると、

$$(J_1)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

$$(J_2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

$$(J_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.45)$$

$$(K_1)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

$$(K_2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

$$(K_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

z 軸周りの回転が $\exp(i\theta J_3)$ と書けるように、 z 軸方向のローレンツブーストは $\exp(i\eta K_3)$ と書ける！
次の交換関係（代数）を得る。（具体的な計算は省略）

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (5.49)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad (5.50)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (5.51)$$

[式 (5.9) と式 (5.49, 5.50, 5.51) を比較]

5.3 ローレンツ群の表現の一般論（A スピン、B スピン）

ローレンツ群の表現の一般論をやるために、A スピン、B スピンを定義してみよう。

$$A_i \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad (5.52)$$

$$B_i \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i). \quad (5.53)$$

式 (5.49, 5.50, 5.51) を使うと、 A_i と B_i について次の交換関係（代数）を得る。

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad (5.54)$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad (5.55)$$

$$[A_i, B_j] = 0. \quad (5.56)$$

A_i 、 B_i はそれぞれ回転群と同じ代数を為していることが分かり、さらに A_i と B_i は可換なことも分かる。 A に対する“スピン”と B に対する“スピン”を、それぞれ A スピン、 B スピンと呼ぶことにしてみよう。 A スピンと B スピンの大きさを指定することにより、ローレンツ群の既約表現が一つ決まる。表現の次元は $(2A+1)(2B+1)$ になる。ということで、ローレンツ群は回転群を2つ組み合わせたものみたいな感じになっている。¹²

まとめると、

- 回転群の既約表現：スピン j で指定。 j_z の値は、 $j_z = j, j-1, \dots, -j$ 。 $2j+1$ 次元。
- ローレンツ群の表現：スピン A と B で指定。 A_3 の値は、 $A, A-1, \dots, -A$ 。 B_3 の値は、 $B, B-1, \dots, -B$ 。結果、 $(2A+1)(2B+1)$ 次元。

5.4 ローレンツ群の既約表現の具体例

回転群の表現はスピンの値を半整数で指定すれば一意に決まった。ローレンツ群の表現は A スピン、 B スピンの値のそれぞれを半整数で指定すれば決まる。

5.4.1 スカラー

A スピン、 B スピンをともに0としてみよう。(0,0)と書く。この表現の次元は

$$(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 1) = 1 \quad (5.57)$$

であり、

$$J_i = 0, \quad K_i = 0. \quad (5.58)$$

ローレンツ変換に対し不変なことが分かる。これはローレンツスカラー。

5.4.2 ワイルスピノル

(1/2,0) という表現を考えてみよう。この表現の次元は、

$$(2 \times 1/2 + 1)(2 \times 0 + 1) = 2 \quad (5.59)$$

である。 A_i と B_i は具体的には、 2×2 行列で、

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad B_i = 0. \quad (5.60)$$

¹²ローレンツ群は回転群2つというのはちょっとごまかしがある。ローレンツ群は $SO(1,3)$ 。 $SO(4)$ は $SU(2) \times SU(2)$ と同じ代数。

と書くことができる。 $A_i = (J_i + iK_i)/2$ 、 $B_i = (J_i - iK_i)/2$ と定義したことから、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i. \quad (5.61)$$

これは、左手型ワイルスピノル (left-handed Weyl spinor)。あとで詳しくみる。

また、 $(0, 1/2)$ という表現も考えることができる。この表現の次元も同様に 2 であり、具体的な A_i と B_i の形は 2×2 行列で、

$$A_i = 0, \quad B_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \quad (5.62)$$

と書ける。 J_i と K_i は、

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = \frac{i}{2}\sigma_i. \quad (5.63)$$

と書ける。これは、右手型ワイルスピノル (right-handed Weyl spinor)。これもあとで詳しくみる。

5.4.3 ベクトル

ベクトルは既約表現で、A スピン B スピンの言葉でいうと $(1/2, 1/2)$ と理解できる。これは確かに $2 \times 2 = 4$ 成分。また、回転群の表現としては $1/2 \times 1/2 = 0 + 1$ となっているので、確かに 4 成分ベクトルっぽい。¹³

5.5 質量 0 のフェルミオンとワイルスピノル

ローレンツ群の既約表現の作り方を学んだ。結局、4 成分のディラックスピノルは、どんな表現だったのか？ワイルスピノルというのがでてきたが、ディラックスピノルの関係は？それを考えるために、質量 0 のフェルミオンを一旦考えてみよう。

5.5.1 質量 0 の時のディラック方程式

実は、ワイルスピノルは質量 0 のフェルミオンを記述する。確認してみよう。ディラック方程式で $m = 0$ としてみると、

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (5.64)$$

スピノルの上下 2 成分ずつで分けてみよう。

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - m & i\partial_i \sigma^i \\ -i\partial_i \sigma^i & -i\partial_t - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0. \quad (5.65)$$

突然だが、こんな組み合わせを取ってみよう。

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ - \psi_-), \quad (5.66)$$

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-). \quad (5.67)$$

¹³ J_i と K_i を具体的に構成してベクトルになっていることをチェックすることもできるけど省略。腕試しにやってみるのもよいかも。

すると、2成分ずつに分けたディラック方程式は、 $\psi_{L,R}$ で以下のように書くことができる。

$$(i\partial_t - i\partial_i\sigma^i)\psi_L - m\psi_R = 0, \quad (5.68)$$

$$(i\partial_t + i\partial_i\sigma^i)\psi_R - m\psi_L = 0. \quad (5.69)$$

ψ_L と ψ_R が交じる式になっているが、 $m = 0$ とすると、

$$(i\partial_t - i\partial_i\sigma^i)\psi_L = 0, \quad (5.70)$$

$$(i\partial_t + i\partial_i\sigma^i)\psi_R = 0. \quad (5.71)$$

となって、 ψ_L と ψ_R が分離する！

5.5.2 2つのワイルスピノルの物理的意味

運動量固有状態（平面波）についてみてみよう。 ψ_L に対し、 z 軸正の向きに進む粒子を考えて、

$$\psi_L \propto \exp(-iEt + iEz) \quad (5.72)$$

とおく（質量0の粒子を考えているので $E = |\vec{p}|$ であることに注意！）と、

$$\sigma^3\psi_L = -\psi_L \quad (5.73)$$

が満たされることが分かる。4.4章の議論を思い出すと、これはスピンの向きが下向き（ z 軸負方向）に決まったことをあらわしている！運動量の向きを変えて同じような議論ができるが、スピンと運動量が反対の向きになるという事情は変わらない。

ヘリシティ (helicity) という量を運動量とスピンから定義するのが便利。

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (5.74)$$

ψ_L はヘリシティ $-1/2$ 。

同様に、 ψ_R に対し、

$$\psi_R \propto \exp(-iEt + iEz) \quad (5.75)$$

とおくと、

$$\sigma^3\psi_R = +\psi_R \quad (5.76)$$

ψ_R のスピンは上向きに決まった！運動量の向きを変えると、必ずスピンは運動量と同じ向きになる。 ψ_R はヘリシティ $+1/2$ 。

粒子の速度が光速より遅いと追い越すことができる。そうすると、ヘリシティが反転してみえる。粒子の速度が光速だと追い越せない。ヘリシティは反転できない。

5.5.3 ローレンツ群の表現としてのワイルスピノル

ディラック方程式に出てきた4成分スピノルは、ディラックスピノルと呼ばれる。質量0のディラックスピノルが2つのワイルスピノルに分離できたことから分かるように、ディラックスピノルは既約表現ではない。

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}, \quad \sigma^{0i} = -\sigma^{i0} = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

$\psi_{L,R}$ と ψ_{\pm} の間の関係（基底変換）はこんなだった。

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

ちなみに U は、こんな行列。

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

ということで基底変換してみよう。

$$U^{-1}\sigma^{ij}U = \begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}, \quad (5.80)$$

$$U^{-1}\sigma^{0i}U = \begin{pmatrix} -i\sigma^i & 0 \\ 0 & i\sigma^i \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

ブロック対角化できた！この基底で上二成分が $(1/2, 0)$ のワイルスピノル、下二成分が $(0, 1/2)$ のワイルスピノル。となっており、それぞれ既約表現。

5.5.4 ディラックスピノル

つまり、4成分のディラックスピノルは、A スピン B スピンの言葉でいうと、

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (5.82)$$

となり、2つの既約表現の直和として書ける。

5.6 カイラリティ、ヘリシティ、パリティ

カイラリティはローレンツ群の表現を区別するのに使う。

- $(1/2, 0)$ は左手型 (left-handed)
- $(0, 1/2)$ は右手型 (right-handed)

質量0の粒子に対しては、ヘリシティとカイラリティは1対1。

- 質量 0 ヘリシティ $-1/2$: 左手型 (left-handed)
- 質量 0 ヘリシティ $+1/2$: 右手型 (right-handed)

ローレンツ変換の性質から、

$$P^{-1}J_iP = J_i, \quad P^{-1}K_iP = -K_i. \quad (5.83)$$

これを使うと、パリティで A スピンと B スピンが入れ替わることが分かる。

$$P^{-1}A_iP = B_i, \quad P^{-1}B_iP = A_i. \quad (5.84)$$

つまり、パリティ変換で $(1/2, 0)$ と $(0, 1/2)$ は入れ替わる！つまり、パリティ変換で left-handed Weyl spinor と right-handed Weyl spinor は入れ替わる！

自然界ではパリティ対称性は破れている。原子核のベータ崩壊を引き起こす弱い相互作用 (weak interaction) は左手型のクォークやレプトンと相互作用するが、右手型のクォークやレプトンとは相互作用しない。

5.7 ローレンツ群のまとめ

ローレンツ群の性質は回転群の性質と良く似ているので、比較をまとめた。実は三次元回転群 $SO(3)$ より、四次元回転群 $SO(4)$ の方が良く似ている。詳しくは、教科書 (物理学におけるリー代数—アイソスピンの統一理論へ、ジョージヤイ、など) を参考にしてください。

	(三次元) 回転群	(四次元) ローレンツ群
群の定義	$RR^T = I_3$	$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$
代数	$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$	$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ $[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$ $[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$
既約表現	スピンの指定	2つの“スピン” (A スピン、B スピン) で指定
表現の具体例	スピン 0 スピン 1/2 ...	スカラー 左手型ワイルスピノル 右手型ワイルスピノル ディラックスピノル ...

表 1: 回転群とローレンツ群の比較

6 電磁場中のディラック (Dirac) 方程式

電磁場中の電子のふるまいについて、相対論的効果を取り入れて議論できるのが、ディラック方程式の醍醐味のひとつ。何が起きるかみてみよう！

6.1 ゲージ対称性について復習

電磁場をディラック方程式に入れたいが、いったいどうやればいいのか。まず、電磁気学がゲージ対称性もつゲージ理論であることを復習し、さらに、ゲージ対称性を利用することにより荷電粒子の従う方程式を簡単に導いてみよう。

ゲージ対称性（ゲージ理論）はめっちゃくちゃ大事な考え方。 β 崩壊を引き起こす弱い相互作用はゲージ理論で記述される。また、クォークを3つひとまとめにして陽子や中性子を作る強い相互作用もゲージ理論で記述される。重力も一種のゲージ理論。[4, 5]

6.1.1 古典電磁気学のゲージ対称性

電磁気学からゲージ対称性を見出してみよう。電磁気学では電場 \vec{E} とか磁場 \vec{B} の振る舞いが記述される。マクスウェル方程式の一部 [式 (4.25)] を満たす解を構成するために、電磁場をスカラーポテンシャル ϕ とかベクトルポテンシャル \vec{A} の微分として書くと色々便利なのだった。

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6.1)$$

上の定義からすぐわかるように、任意の関数 $\lambda(t, \vec{x})$ を使い、

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda. \quad (6.2)$$

という風に ϕ と \vec{A} を取り替えても、同じ電磁場が得られる。異なる ϕ と \vec{A} が得られたが、電磁場 \vec{E} と \vec{B} はあくまで一緒なので、物理が全く同じ状況を記述する方法を複数見つけたことになる。物理の記述にある種の冗長性がある。こういうのを、ゲージ対称性がある、と言い、上で定義したような ϕ と \vec{A} の変換をゲージ変換と呼ぶのだった。（なぜわざわざ冗長なやり方で物理を記述するのだろうか？ゲージ場の量子論まで学ぶといろいろ見えてくるが、それはこの講義の範囲を越えるので割愛）

特殊相対論のテンソルの形式で書くと、簡潔にかける。ゲージ変換は任意の関数 $\lambda(t, \vec{x})$ に対して、

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda \quad (6.3)$$

に対して、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \rightarrow \quad \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (6.4)$$

ということで、 $F_{\mu\nu}$ は不変。つまり電磁場は不変。

6.1.2 電磁場中の古典粒子

電磁場中の荷電粒子の運動方程式は次のようなものだった。

$$m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \quad (6.5)$$

以下のラグランジアンから運動方程式が得られることを見よう。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - e\phi + e\vec{A}\dot{\vec{x}}. \quad (6.6)$$

オイラーラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} \\ \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + eA_i) &= -e\partial_i\phi + e\dot{x}_j\partial_iA_j \\ m\ddot{x}_i + e\dot{x}_j\partial_jA_i + e\dot{A}_i &= -e\partial_i\phi + e\dot{x}_j\partial_iA_j \\ m\ddot{x}_i &= e(-\partial_i\phi - \dot{A}_i) + e\dot{x}_j(\partial_iA_j - \partial_jA_i).\end{aligned}\tag{6.7}$$

確かに荷電粒子の運動方程式がえられた。

さて、ラグランジアンをルジャンドル変換することにより、ハミルトニアンが次のように書けることも分かる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi.\tag{6.8}$$

どうも、電磁場なしのハミルトニアンに対して、以下の置き換えルールを適用すれば、電磁場中のハミルトニアンが得られるようだ。

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}, \quad H \rightarrow H - e\phi.\tag{6.9}$$

6.1.3 電磁場中の量子力学

量子力学では、式 (6.9) を参考にして、次のような演算子の「置き換えルール」を採用すると上手く行く。

$$-i\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{\nabla} - e\vec{A}, \quad i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi.\tag{6.10}$$

ハミルトニアンは次のようになる。

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} + e\vec{A})^2 + e\phi \\ &= -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + e\phi\end{aligned}\tag{6.11}$$

6.1.4 量子力学とゲージ対称性

違う論理を使って、式 (6.11) のハミルトニアンにたどり着くこともできる。波動関数 ψ の位相を回転されるような

$$\psi \rightarrow e^{i\lambda}\psi\tag{6.12}$$

変換に対して対称性があることを要求してみよう。そうすると、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを導入して、それらが変換のもとで以下のように振る舞うことが要求される。

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\lambda.\tag{6.13}$$

この考え方はとても便利。これはゲージ対称性を原理として話を始めていることになる。マックスウェル方程式とも良く馴染むし、むしろこうやって議論する方が自然。

6.2 電磁場中のディラック (Dirac) 方程式と g 因子

さて、前の章で、

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\lambda(x)}\psi(x) \quad (6.14)$$

というゲージ変換に対する共変性を要求すれば、必然的にスカラーポテンシャルとベクトル・ポテンシャルを導入することになり、電磁場との相互作用が入ることが分かった。この手続きにより、ディラック方程式に電磁場を導入してみよう。具体的な手続きとしては、以下のような微分演算子の置き換えを行えばいい。

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu. \quad (6.15)$$

結果として、電磁場中のディラック方程式は次のようになる。

電磁場中のディラック方程式

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0. \quad (6.16)$$

式 (6.16) は、次のような変換に対して共変。

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\lambda(x)}\psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\lambda(x). \quad (6.17)$$

非相対論的極限 ($v \ll c$) での電磁場との相互作用を計算してみよう。ディラックスピノルの上 2 成分を ψ_+ 、下 2 成分を ψ_- と名付けてみる。つまり、次のように分解する。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

ガンマ行列は次のように書けた。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

ディラック方程式を ψ_+ と ψ_- で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - e\phi - m & (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} & -i\partial_t + e\phi - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0. \quad (6.20)$$

式を整理するために次のような $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ を定義してみよう。

$$\tilde{\psi}_+ = e^{imt}\psi_+, \quad \tilde{\psi}_- = e^{imt}\psi_-. \quad (6.21)$$

ディラック方程式を $\tilde{\psi}_+$ と $\tilde{\psi}_-$ で書くと、

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - e\phi & (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \\ -(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} & -i\partial_t + e\phi - 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_+ \\ \tilde{\psi}_- \end{pmatrix} = 0. \quad (6.22)$$

非相対論的な極限、つまり電子の運動エネルギーが静止エネルギーに比べて小さい極限を考えてみよう。 $|m\tilde{\psi}_-| \gg |(i\partial_t - e\phi)\tilde{\psi}_-|$ に違いない。ということは、

$$(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\tilde{\psi}_+ + 2m\tilde{\psi}_- \simeq 0. \quad (6.23)$$

これを式 (6.22) の一行目に代入すると、

$$(i\partial_t - e\phi)\tilde{\psi}_+ + (i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma} \left[-\frac{1}{2m}(i\vec{\nabla} + e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\tilde{\psi}_+ \right] = 0. \quad (6.24)$$

左辺の第二項がゴチャゴチャしている。ちょっと整理してみよう。特にこの関係式を使う。

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \times (i\partial_i + eA_i)(i\partial_j + eA_j) &= (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \times (i\partial_i + eA_i)(i\partial_j + eA_j) \\ &= -(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 + i\epsilon_{ijk}\sigma_k (ieA_i\partial_j + ie\partial_i A_j) \\ &= -(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2 - e\epsilon_{ijk}\sigma_k (\partial_i A_j) \end{aligned} \quad (6.25)$$

結局まとめると、

$$i\frac{\partial\tilde{\psi}_+}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2\tilde{\psi}_+ - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})\tilde{\psi}_+ - e\phi\tilde{\psi}_+. \quad (6.26)$$

電荷を持った粒子のシュレーディンガー方程式と比較してみよう。右辺第一項と第三項と同じものは式 (6.11) のハミルトニアンにある。新しいのは右辺第二項の $\sigma \cdot (\nabla \times A)$ を含む項。

今、 $\tilde{\psi}_+$ はディラックスピノルの上二成分を取り出したもの。4.4 章の議論を思い出そう。一番上の成分は角運動量 (つまりスピン) が $J_z = +1/2$ の成分、二番目の成分は $J_z = -1/2$ の成分であった。なので、このパウリ行列 σ はスピン演算子 \vec{s} を用いて、 $\sigma = 2\vec{s}$ と読み替えてよい。 $\nabla \times A$ は磁場。結局、以下のようなハミルトニアンが得られたことになる。

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 - \frac{e}{m}\vec{s} \cdot \vec{B} - e\phi \quad (6.27)$$

面白いのは右辺の第 2 項。磁場とスピンの相互作用項が生まれている！

磁場とスピンの相互作用項は g 因子というパラメーターを使って、

$$H = -\frac{ge}{2m}\vec{s} \cdot \vec{B}. \quad (6.28)$$

と書かれることが多い。ディラック方程式を使うと $g = 2$ が得られたことになる。

6.3 g 因子の測定値と比較してみよう

ディラック方程式によると、ディラックスピノルで記述される荷電粒子の g 因子は 2 になるはず。この計算はどれくらい上手くいっているのだろうか？ Particle Data Group¹⁴などを見ると、実験で測定された様々な粒子に関数 g 因子の値が分かる。

6.3.1 電子とミュー粒子

例えば、電子とミュー粒子の g 因子は次のような値。

$$g_e = 2.00231930436182 \pm 0.000000000000052, \quad (6.29)$$

$$g_\mu = 2.0023318412 \pm 0.0000000004. \quad (6.30)$$

¹⁴<https://pdglive.lbl.gov/Particle.action?node=S003&init=0>

0.1 % くらいの精度で g 因子は 2 とみなせる。どうやらない上手くいつているようだ。

しかし、これで満足していいのか？ 電子の g 因子は 10^{-13} 程度の精度で測られていて、ミュー粒子の g 因子は 10^{-10} 程度の精度で測られていて、あらゆる自然科学の中でも屈指の精密測定。 g の 2 からのずれは 0.002 程度であるものの、実験精度がそれより何桁も小さいので、 $g-2$ が 0 でないことは確立している。どう解釈したらいいだろう？ ディラック方程式が上手くいつていない？

このズレは異常磁気モーメントと呼ばれていて、ディラック方程式の限界を示しているとも見られる。ディラック方程式で g 因子を計算するときには、電磁場を外場とみなしていた。（つまり、電磁場がディラックスピノルで記述される粒子の影響を受けないと思って計算している。）でももちろんこれは近似にすぎない。電磁場はもちろん荷電粒子の影響を受ける。その影響を量子論的に記述する必要がある。電磁場も量子化しなくてはならない。ちゃんと計算するには、場の量子論が必要。（例えば Peskin-Schroeder の教科書の 6.3 章など）

詳細は場の量子論の教科書にゆずるが、場の量子論（正確には量子電磁気学、quantum electrodynamics）を使うと、摂動計算により、異常磁気モーメントが微細構造定数 $\alpha = e^2/4\pi$ の級数として書ける。特に、 α の一次の項が一番主要な項で、

$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (6.31)$$

と書ける。これを計算したのが、シュウイングー (Schwinger)[6]¹⁵。 $\alpha \approx 1/137$ とすると、数値的に上手くいつてるのが分かります。¹⁶

6.3.2 陽子

陽子の磁気双極子モーメントはもっとずれている！最新の測定値はこんな感じ。

$$\frac{\mu_p}{e\hbar/2m_p} = 2.79284734463 \pm 0.00000000082 \quad (6.32)$$

ちなみに、1933 年に陽子の磁気双極子モーメントをはじめて測定したシュテルン (Stern) は 1943 年にこの業績でノーベル賞を貰っている。¹⁷ Stern が Pauli にディスられたエピソードが『スピンはめぐる』に載っていて興味深い。

『さっき、シュテルンたちが陽子の磁気能率を測定した話をしましたね。ところがそのころ或る日、パウリがシュテルンの研究室を訪ねたことがあったそうです。そのときパウリはシュテルンに向かって、いまどんなことをやっているか、と聞いたそうです。そこでシュテルンは、いま陽子の磁気能率をはかっている、と答えました。そしたらパウリ曰く、いまごろそんなことやったって意味ないじゃないか、あんたはディラックの理論を知らんのか、ディラック方程式からそれは $\frac{e\hbar}{2m_p}$ になるにきまっている、と。』（「スピンはめぐる」より一部抜粋）

¹⁵シュウイングー (Julian Schwinger) の墓にはこの公式が刻んである。"Schwinger gravestone"で画像検索してみよう <https://www.google.com/search?q=schwinger+gravestone&tbm=isch>

¹⁶ちなみに、電気の異常磁気モーメントは量子電磁力学の検証にとって非常に重要。さらに、ミュー粒子の磁気双極子モーメントは素粒子現象論のホットトピックの一つ [7]。以下のようなページを参照のこと。

<http://comet.phys.sci.osaka-u.ac.jp/research/r000.html>

<https://g-2.kek.jp/portal/index.html>

¹⁷<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01330773>

<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01330774>

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1943/summary/>

6.4 ディラック方程式の限界

これまで相対論的に量子力学を記述しようとしてディラック方程式を調べてきた。ディラック方程式は色々上手く行く点もあるが、同時に限界も見えてきた。まず、そもそも、スピン 1/2 は相対論+量子力学の必然ではありえない。スピン 0¹⁸ とか 1 の粒子いるし。さらに、相対論では静止質量もエネルギーに過ぎないので、それを運動エネルギーなどに転換できる。原子核反応における質量欠損はその例となっているが、 $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ などの重い素粒子が複数の軽い素粒子に崩壊することもできるようになっている。こういった粒子数が代わる反応は、あきらかにディラック方程式では扱えない。さらに、前の章で見たように g 因子の 2 からのズレが説明できない。ということでディラック方程式に対する不満のまとめ。

- スピン 1/2 以外の粒子も扱える必要がある。
- 粒子数が代わる反応を扱えるようになるために、多粒子系を扱える枠組みが必要。
- g 因子を測定したら 2 からズレている。

上記の不満を解決しつつ相対論的な量子力学をつくるには場の量子論を導入しなければならない。残りの章で、場の量子論の初歩的なことを学んでいく。

7 非相対論的な一次元弦の量子論（簡単な場の量子論の例）

この章では、場を量子論的に扱うことについて、（非相対論的な）一次元弦の量子論で練習する。連成振動の量子力学の多自由度極限として弦の量子論があらわれることを見て、正準量子化の方法が自然と定まることを見る。

7.1 古典場の理論、有効理論

場の量子論ってなんだろう。場を量子化するってナニ？量子化する前に、古典スカラー場の理論の例を見よう。また、この場の理論が、多数の質点からなる力学系のある種の極限としても理解できることをみる。この見方は場の量子論を理解する上でも役に立つだろう。

7.1.1 連成ばね

非相対論的な古典力学を議論する。質量 m の質点 n 個を固有振動数 ω のばねでつなげる。各質点の釣り合いの位置からのずれを z_i としよう。端っこをつなげて輪にして $z_{n+1} = z_1$ としよう。（こういうのを周期境界条件と呼ぶ。）このとき、各質点の運動方程式は、以下のように書ける。

$$m\ddot{z}_k = m\omega^2(z_{k-1} - z_k) + m\omega^2(z_{k+1} - z_k) \quad (7.1)$$

¹⁸Pauli & Weisskopf https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-322-90270-2_36 <https://inspirehep.net/literature/25368>

行列の形で書くとみやすい。

$$m \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \vdots \\ \ddot{z}_n \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

基底を適切にとれば右辺の行列は対角化できる。やってみよう！右辺の行列の固有ベクトルは、

$$u_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2\pi k/n) \\ \sin(4\pi k/n) \\ \vdots \\ \sin((2n-2)\pi k/n) \end{pmatrix}, \quad (1 \leq k < n/2) \quad (7.3)$$

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\pi k/n) \\ \cos(4\pi k/n) \\ \vdots \\ \cos((2n-2)\pi k/n) \end{pmatrix} \times \begin{cases} 1 & (1 \leq k < n/2) \\ 1/\sqrt{2} & (k = 0, n/2) \end{cases} \quad (7.4)$$

u_k と v_k に対応する固有振動数 ω_k は、運動方程式の右辺の行列の固有値から次のように求められる。

$$\omega_k^2 = 4\omega^2 \sin^2 \frac{\pi k}{n} \quad (7.5)$$

次のような変数を定義してみると、

$$\phi_k \equiv \vec{u}_k \cdot \vec{z}, \quad \chi_k \equiv \vec{v}_k \cdot \vec{z}. \quad (7.6)$$

対角化された運動方程式がえられる。

$$\ddot{\phi}_k = -\omega_k^2 \phi_k, \quad \ddot{\chi}_k = -\omega_k^2 \chi_k \quad (7.7)$$

各 ϕ_k 、 χ_k が各固有振動モードに対応する。

7.1.2 連続極限（低エネルギー極限）

n が十分 1 より大きい状況を考えよう。固有振動数の最大値は (n によらず) 2ω 。 $k \ll n$ のモードの固有振動数を見てみよう。以下のように近似できる。

$$\omega_k \simeq 2\pi k \times \frac{\omega}{n} \quad (7.8)$$

さて、 $k \ll n$ のモードについて、次のことがすぐ分かる。

- ω_k は ω よりずっと小さい
- ω_k の値は ω/n で決まるので、 ω と n をそれぞれ定数倍しても同じになる。

振動数が小さい、は、エネルギーが小さい、と同じ。 ω/n を一定に保ってしまえば、 n や ω の値が変わっても見分けがつかなくなる。低エネルギーの自由度を議論するのに便利な「有効理論」が作れそうだ！

m, n , そして ω を次のように書き換えてみよう。

$$m = \rho\Delta x, \quad n = \frac{L}{\Delta x}, \quad \omega = \frac{v}{\Delta x}. \quad (7.9)$$

L, v, ρ を固定しながら、 Δx を小さく (N を大きく) しよう。 (L は系の長さ、 v は波が伝わる速度、 ρ は単位長さあたりの質量)

また、質点のラベル k の代わりに“位置”を定義しよう。

$$x = k\Delta x, \quad (7.10)$$

そうすると、運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t^2} z(x) = \rho v^2 \frac{z(x + \Delta x) - 2z(x) + z(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (7.11)$$

と書けるので、 Δx を0にもっていく極限で、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (7.12)$$

速度 v で伝わる波を記述している。

固有振動の解としては以下のようなものがえられる。

$$z(x, t) \propto \sin\left(\frac{2\pi k(x - vt)}{L}\right), \quad (7.13)$$

$$z(x, t) \propto \cos\left(\frac{2\pi k(x - vt)}{L}\right). \quad (7.14)$$

固有振動数は

$$\frac{2\pi kv}{L} \quad (7.15)$$

なので、確かに、質点系の低エネルギー解と一緒に、 v を光速と同等すれば、一次元のクラインゴールドン方程式と見ることもできる。スカラー場の量子論の予感！

7.1.3 有効理論という考え方

上でみた、一次元古典スカラー場の理論は、連成ばねの低エネルギー有効理論とみなすこともできる。有効理論という考えめっちゃ大事。

物理は自然科学なので実験でチェックされるもの。つまり、次のような性質を持っている。

- 全ての実験にはエラーバーがついている。 → ある理論が実験結果をうまく説明しているとしても、理論の予言値と実験の観測値のずれの大きさがエラーバーより小さいだけかもしれない。
- これまでに人類が行った実験の数は有限。 → ある理論が今まで行われた実験結果をうまく説明しているとしても、人類が今までやってない実験で、理論と実験のずれが見つかるかもしれない。

つまり、物理の理論は「有効理論」だと思ふべき。その意味は、

- (少なくとも) 一定の条件を満たすときに、現実世界を十分な精度で近似するもの。

ということで、理論が有効な範囲を意識することはめっちゃ大事。具体例はこんな感じ。

- ニュートン力学： $v \ll c$ かつマクロスコピック（量子論的效果無視できる）なら良い近似
- 非相対論的量子力学： $v \ll c$ なら良い近似
- 特殊相対論：マクロスコピック（量子論的效果無視できる）なら良い近似

ある理論から適用範囲の狭い有効理論は演繹的に導出できるが、適用範囲の広い理論に行くには論理的飛躍が必要。

- 例1：古典力学から量子力学に行くには、いきなり c 数を演算子にするなどの論理的飛躍が必要だった。
- 例2：量子力学から場の量子論に行くにも論理的飛躍が必要。
- 例3：超対称性粒子まだ見つかってないけど、いつかは見つかるかも??

7.2 連成ばねの量子論と連続極限

古典場の理論が、質点の力学の多自由度の極限としてあらわれることをみた。おなじように、量子場の理論が、量子力学の多自由度の極限としてあらわれることをみていく。

7.2.1 調和振動子

調和振動子の量子化を思い出しておこう。固有振動数 ω の調和振動子のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z} - \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \quad (7.16)$$

共役運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad (7.17)$$

ハミルトニアンは、

$$H = p\dot{z} - L = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (7.18)$$

正準量子化しよう。

$$[z, p] = i. \quad (7.19)$$

次のような演算子 a (と a^\dagger) を定義するのが便利なのであった。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}z + \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}p, \quad (7.20)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}z - \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}p. \quad (7.21)$$

a と a^\dagger の交換関係が計算できる。

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (7.22)$$

さらに、ハミルトニアンを a と a^\dagger で書き直せる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \\ &= \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\omega \end{aligned} \quad (7.23)$$

さらにさらに、 a, a^\dagger と H の交換関係も計算できる。

$$[H, a] = -\omega a, \quad [H, a^\dagger] = \omega a^\dagger. \quad (7.24)$$

a がかかるとエネルギーが ω 減り、 a^\dagger がかかるとエネルギーが ω 増える。
最低エネルギー状態 $|0\rangle$ は次のように書ける。

$$a|0\rangle = 0. \quad (7.25)$$

第 n 励起状態は

$$|n\rangle = (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (7.26)$$

エネルギー固有値は

$$H|n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (7.27)$$

7.2.2 連成振動

バネ定数 k で連結された質量 m の質点を n 個繋げてみよう。

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} m \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (z_j - z_{j+1})^2 \right) \quad (7.28)$$

$z_{n+1} = z_1$ とする。(周期境界条件) 座標 x_j の共役運動量は、

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m \dot{x}_j \quad (7.29)$$

ハミルトニアンは、

$$H = \sum_j \left(\frac{1}{2m} p_j^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_j - x_{j+1})^2 \right) \quad (7.30)$$

ϕ_j と χ_j を定義して、量子化してみると見通しがよい。

$$\phi_j = \vec{u}_j \cdot \vec{z}, \quad \chi_j = \vec{v}_j \cdot \vec{z}. \quad (7.31)$$

以下の関係式が便利。

$$I_n = \sum_j \vec{u}_j \vec{u}_j^T + \sum_j \vec{v}_j \vec{v}_j^T, \quad (7.32)$$

$$A = \sum_j m\omega_j^2 \vec{u}_j \vec{u}_j^T + \sum_j m\omega_j^2 \vec{v}_j \vec{v}_j^T \quad (7.33)$$

この関係式を使うとラグランジアンは対角化できる。

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{\vec{z}}^T I_n \dot{\vec{z}} - \frac{1}{2} \vec{z}^T A \vec{z} \\ &= \sum_j \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_j^2 - \frac{1}{2} m\omega_j^2 \phi_j^2 \right) + \sum_j \left(\frac{1}{2} \dot{\chi}_j^2 - \frac{1}{2} m\omega_j^2 \chi_j^2 \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

ϕ と χ の共役運動量は、

$$p_j^{(\phi)} = m\dot{\phi}_j, \quad p_j^{(\chi)} = m\dot{\chi}_j \quad (7.35)$$

交換関係はクロネッカーのデルタ使って次のように書ける。

$$[\phi_j, p_{j'}^{(\phi)}] = i\delta_{jj'}, \quad [\chi_j, p_{j'}^{(\chi)}] = i\delta_{jj'}. \quad (7.36)$$

生成消滅演算子を定義しよう。

$$c_j = \sqrt{\frac{m\omega_j}{2}} \phi_j + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_j}} p_j^{(\phi)}, \quad d_j = \sqrt{\frac{m\omega_j}{2}} \chi_j + \frac{i}{\sqrt{2m\omega_j}} p_j^{(\chi)}. \quad (7.37)$$

$$\phi_j = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_j}} (c_j + c_j^\dagger), \quad (7.38)$$

$$\chi_j = \frac{1}{\sqrt{2m\omega_j}} (d_j + d_j^\dagger). \quad (7.39)$$

(normalization が違うモードはめんどいから省略)

$$\begin{aligned} z_j &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{j'} \frac{1}{\sqrt{2m\omega_j}} \left[(c_{j'} + c_{j'}^\dagger) \cos\left(\frac{2\pi jj'}{n}\right) + (d_{j'} + d_{j'}^\dagger) \sin\left(\frac{2\pi jj'}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{j'} \frac{1}{\sqrt{2mn\omega_j}} \left[\frac{c_{j'} - id_{j'}}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{2\pi ijj'}{n}\right) + \frac{c_{j'}^\dagger + id_{j'}^\dagger}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{2\pi ijj'}{n}\right) \right] \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$a_{j'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{j'} - id_{j'}) \quad (7.41)$$

$$z_j = \sum_{j'} \frac{1}{\sqrt{2mn\omega_j}} \left[a_{j'} \exp\left(\frac{2\pi ijj'}{n}\right) + a_{j'}^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi ijj'}{n}\right) \right] \quad (7.42)$$

z_j が生成消滅演算子の組み合わせで書くことができた。

7.2.3 連続極限

$$m = \rho\Delta x, \quad n = \frac{L}{\Delta x}, \quad \omega = \frac{v}{\Delta x} \quad (7.43)$$

という置き換えをしてみよう。古典連成ばね系で $\Delta x \rightarrow 0$ の連続極限をとると、古典スカラー場があらわれるのを見た。量子連成ばね系で $\Delta x \rightarrow 0$ の連続極限をつってみよう。スカラー場の量子論がえられるはずだ。

$$p_j = m\dot{z}_j = \Delta x \times \rho\dot{z}_j \quad (7.44)$$

なので、

$$\pi_j \equiv \frac{p_j}{\Delta x} = \rho\dot{z}_j \quad (7.45)$$

というのを定義しておくとしさそう。

π_j の定義と、 z_j との交換関係は、

$$\pi_j = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j}, \quad [z_j, \pi_{j'}] = \frac{i\delta_{jj'}}{\Delta x} \quad (7.46)$$

とまとめられる。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ると、交換関係が発散してしまう？実はもう少しよい見方がある。

$$\Delta x \sum_{j'} \frac{\delta_{jj'}}{\Delta x} = 1 \quad (7.47)$$

という式が容易に確かめられるが、連続極限で離散和は以下のような積分になる。

$$\Delta x \sum_{j'} \rightarrow \int dx' \quad (7.48)$$

すなわち、 $\delta_{jj'}$ の連続極限は、

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta x} \rightarrow \delta(x - x') \quad (7.49)$$

と理解してよい、連続極限 $\Delta x \rightarrow 0$ における交換関係はデルタ関数を使って、

$$[z_j, \pi_{j'}] = \frac{i\delta_{kk'}}{\Delta x} \rightarrow [z(x), \pi(x')] = i\delta(x - x') \quad (7.50)$$

となる。

π_j の定義は、汎関数微分を使うと綺麗に書けることをみてみよう。汎関数微分の定義は、

$$\frac{\delta X}{\delta f(x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{X[f(x) + \epsilon\delta(x - x_0)] - X[f(x)]}{\epsilon} \quad (7.51)$$

例えば、

$$X = \int dx f(x)g(x), \quad \frac{\delta X}{\delta f(x)} = g(x). \quad (7.52)$$

π_j の定義を計算してみると、

$$\begin{aligned}\pi_j &= \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i + \epsilon \delta_{ij}\}) - L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i\})}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i + \epsilon \delta_{ij}/\Delta x\}) - L(\{z_i\}, \{\dot{z}_i\})}{\epsilon}.\end{aligned}\tag{7.53}$$

ここで、 $\epsilon \delta_{ij}/\Delta x \rightarrow \delta(x - x_0)$ に注目すると、連続極限で、

$$\pi_j = \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \quad \rightarrow \quad \pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{z}(x)}\tag{7.54}$$

ラグランジアンも連続極限とっておこう。

$$\begin{aligned}L &= \sum_j \left(\frac{1}{2} m \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (z_j - z_{j+1})^2 \right) \\ &= \Delta x \sum_j \left(\frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x} \dot{z}_j^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x} (\omega \Delta x)^2 \left(\frac{z_j - z_{j+1}}{\Delta x} \right)^2 \right) \\ &\rightarrow \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right].\end{aligned}\tag{7.55}$$

まとめると、

- 共役運動量の定義の微分が汎関数微分におきかわった
 - 交換関係のクロネッカーのデルタがデルタ関数におきかわった
- だいたい同じことをやれば量子化できるのが見えてきた。有限自由度の量子力学のとき、正準量子化は、
- まずラグランジアン L を書く。
 - 共役運動量 $p_j = \partial L / \partial \dot{x}_j$ に対して、 $[x_j, p_{j'}] = i \delta_{jj'}$ という交換関係を要求する。
 - ハミルトニアンを $H = p\dot{q} - L$ として、 x_j と p_j で書く。

という手続きで行われた。

場の理論になってもやることは、結局一緒。つまり、

- まずラグランジアン密度 \mathcal{L} を書く。
- 共役運動量 $\pi(x) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(x)$ に対して、 $[\phi(x), \pi(y)] = i \delta(x - y)$ という交換関係を要求する。
- ハミルトニアン見るとを $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ として、 $\phi(x)$ と $\pi(x)$ で書く。

7.3 一次元弦の量子論

7.3.1 L が有限の場合

次のラグランジアンからはじめよう。

$$L = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (7.56)$$

ϕ の共役運動量は汎関数微分で定義される。

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{z}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(x)} = \rho \dot{z}(x). \quad (7.57)$$

ハミルトニアン H とハミルトニアン密度 \mathcal{H} は、

$$H = \int_0^L dx (\pi \dot{z}) - L = \int_0^L dx \mathcal{H}, \quad (7.58)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \quad (7.59)$$

z と π の交換関係はデルタ関数で与えられる。

$$[z(x), \pi(y)] = i\delta(x - y) \quad (7.60)$$

おもむろに z と π をフーリエ展開してみる。

$$z(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{z}_j \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right), \quad (7.61)$$

$$\pi(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\pi}_j \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right). \quad (7.62)$$

\tilde{z} と $\tilde{\pi}$ の交換関係が求められる。

$$[\tilde{z}_j, \tilde{\pi}_{j'}] = \frac{i}{L} \delta_{j, -j'} \quad (7.63)$$

ハミルトニアンを \tilde{z} と $\tilde{\pi}$ で書ける。

$$H = \frac{L}{2\rho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\pi}_j \tilde{\pi}_{-j} + \frac{1}{2} L \rho v^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi j}{L} \right)^2 \tilde{z}_j \tilde{z}_{-j} \quad (7.64)$$

演算子 a_j を

$$a_j = x_j \tilde{z}_j + i y_j \tilde{\pi}_j \quad (7.65)$$

と定義してみよう。すると、

$$a_j^\dagger = x_j^* \tilde{z}_j^\dagger - i y_j^* \tilde{\pi}_j^\dagger = x_j^* \tilde{z}_{-j} - i y_j^* \tilde{\pi}_{-j} \quad (7.66)$$

a と a^\dagger の交換関係は、

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = -\frac{2x_j y_{j'}}{L} \delta_{jj'} \quad (7.67)$$

ハミルトニアンを a と a^\dagger で書く。

$$H = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\left(-\frac{L}{8\rho y_j^2} + \frac{L\rho v^2}{8x_j^2} \left(\frac{2\pi j}{L} \right)^2 \right) (a_j^2 + a_j^\dagger) + \left(\frac{L}{8\rho y_j^2} + \frac{L\rho v^2}{8x_j^2} \left(\frac{2\pi j}{L} \right)^2 \right) (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) \right) \quad (7.68)$$

a^2 と a^\dagger が消えるように x_j と y_j を決めよう。

$$x_j = \sqrt{\frac{\rho v L}{2} \frac{2\pi j}{L}}, \quad y_j = -\sqrt{\frac{L}{2\rho v} \frac{L}{2\pi j}}. \quad (7.69)$$

結局、以下を得た。

$$[a_j, a_{j'}] = \delta_{jj'}, \quad (7.70)$$

$$H = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2\pi j v}{L} (a_j a_j^\dagger + a_j^\dagger a_j) \quad (7.71)$$

エネルギー固有値は、

$$\omega_j = \frac{2\pi j v}{L}. \quad (7.72)$$

これを使って、

$$x_j = \sqrt{\frac{\rho L \omega_j}{2}}, \quad y_j = -\sqrt{\frac{L}{2\rho \omega_j}}. \quad (7.73)$$

z と π を a と a^\dagger で書ける。

$$z = \sum_j \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_j \rho L}} a_k \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_j \rho L}} a_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i j x}{L}\right) \right), \quad (7.74)$$

$$\pi = \sum_j \left(i\sqrt{\frac{\rho \omega_j}{2L}} a_k \exp\left(\frac{2\pi i j x}{L}\right) - i\sqrt{\frac{\rho \omega_j}{2L}} a_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i j x}{L}\right) \right). \quad (7.75)$$

7.3.2 $L \rightarrow \infty$ 極限

L を無限大にする極限をとってみよう。この極限では、運動量固有値が連続的になるので、

$$\sum_j \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk \quad (7.76)$$

のような置き換えができる。生成消滅演算子の交換関係もデルタ関数で書けるようになる。

$$[\sqrt{L}a_j, \sqrt{L}a_{j'}] = L\delta_{jj'} \rightarrow (2\pi)\delta(k - k'). \quad (7.77)$$

式(7.74, 7.74)を以下のように書き換えてみる。

$$z = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{1}{L} \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sqrt{L}a_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k L}} \sqrt{L}a_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) \right), \quad (7.78)$$

$$\pi = \sqrt{\rho} \frac{1}{L} \sum_k \left(i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \sqrt{L}a_k \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right) - i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \sqrt{L}a_k^\dagger \exp\left(-\frac{2\pi i k x}{L}\right) \right). \quad (7.79)$$

L 無限大極限の z と π は次のように書けるのが分かる。

$$z = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_k \exp(ikx) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} a_k^\dagger \exp(-ikx) \right), \quad (7.80)$$

$$\pi = \sqrt{\rho} \int \frac{dk}{2\pi} \left(i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} a_k \exp(ikx) - i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} a_k^\dagger \exp(-ikx) \right), \quad (7.81)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)\delta(k - k'). \quad (7.82)$$

7.3.3 まとめ

	有限自由度	場の理論
古典論	古典連成ばね ↓ (量子化)	一次元自由スカラー場の古典論 ↓ (量子化)
量子論	連成調和振動子	一次元自由スカラー場の量子論

8 ローレンツ不変な自由スカラー場の量子論

連成ばねの極限として古典スカラー場があらわれるように、多自由度の調和振動子の極限として量子スカラー場があらわれることをみた。さらに、場の量子論における正準量子化の仕方が自然と定まることもみた。この章では、ローレンツ不変な古典スカラー場のラグランジアンを正準量子化してみる。スピン 0 の粒子の特殊相対論的なハミルトニアンがえられることをみてみよう。

8.1 相互作用しないスピン 0 粒子ってどんな感じ？

場の量子論をやるまえに、どんな結果が得られたら良いのか当たりをつけておこう。相互作用しないスピン 0 の粒子を考えてみる。どんな量子系になっているだろうか。相互作用が無視できる系なので、どうなるかは検討が付けられる。

この系にはどんな状態が存在するだろうか。まず、粒子が一つもない状態、すなわち最もエネルギーが低い状態である、真空 $|0\rangle$ が存在しているはずだ。粒子が 1 ついる状態、2 ついる状態、3 ついる状態...がないといけない。粒子は運動量 \vec{p} を持ち、その場合のエネルギーは $\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ だ。そして、運動量が等しい同種粒子は区別がつかない。スピン 0 の粒子はボゾンなのでボーズ統計に従うだろう。¹⁹ ということは、生成消滅演算子のセット a_p, a_p^\dagger があるはずで、それらは

$$a_p|0\rangle = 0, \quad (8.1)$$

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - q), \quad (8.2)$$

$$[a_p, a_q] = [a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0. \quad (8.3)$$

¹⁹ スピン整数の粒子がボゾンで半整数の粒子がフェルミオンとなるのは場の量子論の議論から決まる。本講義の範囲を超えるので詳しく説明しないが、例えば Weinberg の教科書の section 5 を参照してください。

を満たす。粒子の数を数える演算子は

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a_p^\dagger a_p \quad (8.4)$$

と書けるだろう。生成演算子により粒子が1つ存在する状態は、

$$a_p^\dagger |0\rangle \quad (8.5)$$

と表せる。 $N a_p^\dagger |0\rangle = a_p^\dagger$ がすぐ分かる。

ハミルトニアンは、粒子の数を数えてエネルギーをかければよいので、こうなるはず。

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} a_p^\dagger a_p. \quad (8.6)$$

運動量演算子も

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_p^\dagger a_p. \quad (8.7)$$

となるはず。

この生成消滅演算子、ハミルトニアン、運動量演算子が出てくれば勝ち。これらが出てくることを具体的に見ていこう。

8.2 自由実スカラー場の正準量子化

まず、スカラー場 ϕ のラグランジアンを次のように与えてみよう。 ϕ は古典場としては実数の値を取るものとする。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (8.8)$$

なぜこんなラグランジアンを採用するのだろうか？

- スカラー場の微分を含み、
- ローレンツ不変で、
- ϕ の二次の項からなる

ラグランジアンはこの形！

微分を含む項は、

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (8.9)$$

と書ける。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2. \quad (8.10)$$

と比較してみよう。 $\sqrt{\rho} z$ を ϕ に、 v を $1 (= c)$ に置き換え、空間を1次元から3次元にしたものになっている。ということは、連成ばねの系は実は質量0のスカラー場と繋がっていたのだ。 (質量を持つスカラー場と繋がるような連成ばねの系も工夫すると作ることができる。山口さんの相対論的量子力学の講義ノートを参照のこと。 <http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~yamaguch/j/class.html>)

8.2.1 まずは生成消滅演算子

ばねの量子系の連続極限のときと同じように正準量子化してみよう。(ここではシュレーディンガー(Schrödinger) 描像をとる)

まず、 ϕ と $\dot{\phi}$ で書かれたラグランジアン形式を ϕ とその共役運動量の π で書かれた正準形式に書き換える。 $\dot{\phi}$ と π の関係はラグランジアンの変分法により与えられるが、結局ラグランジアン密度の微分で

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x). \quad (8.11)$$

とあたえられる。ハミルトニアンを作って ϕ と π で書こう。

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \pi \dot{\phi} - L \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

よってハミルトニアン密度 \mathcal{H} は、

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \quad (8.13)$$

さて、正準形式が得られたので、 ϕ と π を演算子に置き換え、次の交換関係を導入する。

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0, \quad (8.14)$$

$$[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0, \quad (8.15)$$

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (8.16)$$

ϕ と π をフーリエ変換してみよう。

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}}, \quad \pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tilde{\pi}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}}. \quad (8.17)$$

$\tilde{\phi}$ と $\tilde{\pi}$ の交換関係はこんな感じ。

$$[\tilde{\phi}(\vec{p}), \tilde{\phi}(\vec{q})] = 0, \quad (8.18)$$

$$[\tilde{\pi}(\vec{p}), \tilde{\pi}(\vec{q})] = 0, \quad (8.19)$$

$$[\tilde{\phi}(\vec{p}), \tilde{\pi}(\vec{q})] = i(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}). \quad (8.20)$$

ただし定義により、

$$\tilde{\phi}^\dagger(\vec{p}) = \tilde{\phi}(-\vec{p}), \quad \tilde{\pi}^\dagger(\vec{p}) = \tilde{\pi}(-\vec{p}). \quad (8.21)$$

つぎのような演算子 a_p を定義してみよう。

$$a_p \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (k_p \tilde{\phi}(\vec{p}) + i k_p^{-1} \tilde{\pi}(\vec{p})) \quad (8.22)$$

エルミート共役はこんな感じ。

$$a_p^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (k_p \tilde{\phi}(-\vec{p}) - i k_p^{-1} \tilde{\pi}(-\vec{p})) \quad (8.23)$$

k_p の値によらず次の交換関係がみたされる。

$$[a_p, a_q] = 0, \quad (8.24)$$

$$[a_p^\dagger, a_q^\dagger] = 0, \quad (8.25)$$

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}). \quad (8.26)$$

逆解きすると、

$$\tilde{\phi}(\vec{p}) = \frac{a_p + a_{-p}^\dagger}{\sqrt{2k_p}}, \quad \tilde{\pi}(\vec{p}) = \frac{a_p - a_{-p}^\dagger}{\sqrt{2ik_p^{-1}}}. \quad (8.27)$$

これをもとの定義に代入すると、確かに、式 (8.14, 8.15, 8.16) の場の同時刻交換関係が確かに満たされることが分かる。計算してみよう。

8.2.2 ハミルトニアン

ハミルトニアン密度を計算してみよう。

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (8.28)$$

右辺の項はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{1}{2} \pi^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{k_p k_q}{2} \left(-a_p a_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_p a_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{k_p^2}{2} \left(-a_p a_{-p} + a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p - a_p^\dagger a_{-p}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}\vec{q}}{2k_p k_q} \left(-a_p a_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_p a_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2k_p^2} \left(a_p a_{-p} + a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger \right), \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \frac{m^2}{2} \phi^2 &= \int d^3x \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2k_p k_q} \left(a_p a_q e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_p a_q^\dagger e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q e^{i(-\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + a_p^\dagger a_q^\dagger e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{2k_p^2} \left(a_p a_{-p} + a_p a_q^\dagger + a_p^\dagger a_q + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (8.31)$$

$a_p a_{-p}$ とか $a_p^\dagger a_{-p}^\dagger$ を消すには、

$$k_p = \sqrt{m^2 + p^2} = \sqrt{E_p}. \quad (8.32)$$

結局、以下を得た。

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{i\vec{p}\vec{x}} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right), \quad (8.33)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left(-i a_p e^{i\vec{p}\vec{x}} + i a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right). \quad (8.34)$$

このとき、全部足して次のようなハミルトニアンを得る。

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger) \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} \delta^{(3)}(0)
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

最終行の1つ目の項はまさに欲しかったもの！2つ目の項はなんだろう？なんだか発散しているのが気になるけど、定数なので落としてしまってよい。なぜなら物理的に意味のあるのはある状態と別のある状態のエネルギー差なのだから。²⁰

ハミルトニアンとの交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 [H, a_p] &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_p [a_q^\dagger a_q, a_p] \\
 &= - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} E_p a_q (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\
 &= -E_p a_p
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

同様にして、

$$[H, a_p^\dagger] = E_p a_p^\dagger. \tag{8.37}$$

ということは、 a_p を作用させるとエネルギー固有値が E_p 減り、 a_p^\dagger を作用させるとエネルギー固有値が E_p 増える。

8.3 ネーターの定理と保存量

運動方程式が、次の無限小変換のもとで不変だとしよう。

$$\phi_i \rightarrow \phi_i + \epsilon G_i(\phi(x)) \tag{8.38}$$

例えば、この変換のもとでラグランジアン密度が不変であれば、運動方程式も変わらない。より一般には、ある $X(\phi(x))^\mu$ が存在して、

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon \partial_\mu X^\mu(\phi) \tag{8.39}$$

と変換されればよい。2つ目の項は積分すると表面積分になる。(電磁気のガウスの法則を思い出そう。あれの4次元版をやればよい) 運動方程式を導出するときには表面項は影響がないので、2つ目の項は考えなくてよい。ということで、

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} G_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \partial_\mu G_i \right) = \partial_\mu X^\mu \tag{8.40}$$

²⁰重力があるところもいなくなってくる。実際、ダークエネルギーの大きさは謎。ちなみに超対称性というのをいれると、ボゾンとフェルミオンでキャンセルしあって上手いこと消えたりする。が、今の所、超対称性の証拠は残念ながら見つからない。

が成立する。

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} G_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} G_i \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right) G_i \right] = \partial_\mu X^\mu \quad (8.41)$$

ということは運動方程式が満たされていると、

$$\partial_\mu \left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} G_i - X^\mu \right] = 0. \quad (8.42)$$

保存するカレントが作れた。対称性があると、それに対応する保存カレントがある。これがネーター (Noether) の定理。

8.3.1 複素スカラー場

自由複素スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi \Phi^\dagger \quad (8.43)$$

次の対称性を見出すことができる。

$$\Phi \rightarrow \Phi + i\epsilon \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger - i\epsilon \Phi^\dagger. \quad (8.44)$$

G と X^μ を読み取ると、

$$G_\Phi = i\Phi, \quad G_{\Phi^\dagger} = i\Phi^\dagger, \quad X^\mu = 0. \quad (8.45)$$

保存カレントは、

$$j^\mu = i\Phi \partial^\mu \Phi^\dagger - i\Phi^\dagger \partial^\mu \Phi. \quad (8.46)$$

8.3.2 時間空間並進 (ハミルトニアン、運動量演算子)

自由実スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (8.47)$$

次の対称性を見出すことができる。

$$\phi \rightarrow \phi + \epsilon a^\mu \partial_\mu \phi \quad (8.48)$$

G と X^μ を読み取ると、

$$G_\phi = a^\mu \partial_\mu \phi, \quad X^\mu = a^\mu \mathcal{L}. \quad (8.49)$$

$$j^\mu = (\partial^\mu \phi) a^\nu (\partial_\nu \phi) - a^\mu \mathcal{L} \quad (8.50)$$

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \phi) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (8.51)$$

$$T^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (8.52)$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (8.53)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \dot{\phi} \partial^i \phi \quad (8.54)$$

式 (8.33, 8.34) を使うと、運動量演算子が生成消滅演算子を使って書くことができる。

$$\begin{aligned} \vec{P} &= - \int d^3x \pi \vec{\nabla} \phi \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (8.55)$$

運動量演算子と生成消滅演算子の交換関係は以下ようになる。

$$[\vec{P}, a_{\vec{q}}] = -\vec{q} a_{\vec{q}}, \quad [\vec{P}, a_{\vec{q}}^\dagger] = \vec{q} a_{\vec{q}}^\dagger. \quad (8.56)$$

8.4 局所因果律と反粒子

8.4.1 異時刻交換関係

さて、場の理論でも、正準量子化で同時刻交換関係が要求されることをみた。

$$[\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = 0. \quad (8.57)$$

異なる時刻だとどうなるんだろう？計算してみよう。

ハイゼンベルグ (Heisenberg) 描像での演算子の時間発展をみてみよう。式 (8.33, 8.34) を使って、時間発展させて、

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \vec{x}) = i[H, \phi(t, \vec{x})], \quad (8.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(t, \vec{x}) = i[H, \pi(t, \vec{x})]. \quad (8.59)$$

あらわに解くと、

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x}) + it[H, \phi(0, \vec{x})] + \frac{(it)^2}{2!} [H, [H, \phi(0, \vec{x})]] + \frac{(it)^3}{3!} [H, [H, [H, \phi(0, \vec{x})]]] + \dots, \quad (8.60)$$

$$\pi(t, \vec{x}) = \pi(t, \vec{x}) + it[H, \pi(0, \vec{x})] + \frac{(it)^2}{2!} [H, [H, \pi(0, \vec{x})]] + \frac{(it)^3}{3!} [H, [H, [H, \pi(0, \vec{x})]]] + \dots. \quad (8.61)$$

Campbell-Baker-Hausdolf の公式を使うと、以下のように簡潔にまとめられる。

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{-iHt} \phi(0, \vec{x}) e^{iHt}, \quad (8.62)$$

$$\pi(t, \vec{x}) = e^{-iHt} \pi(0, \vec{x}) e^{iHt}. \quad (8.63)$$

$[H, a_p] = -E_p a_p$ を用いると、Campbell-Baker-Hausdolf の公式を用いて、

$$\begin{aligned} e^{-iHt} a_p e^{iHt} &= a_p + it[H, a_p] + \frac{(it)^2}{2!} [H, [H, a_p]] + \frac{(it)^3}{3!} [H, [H, [H, a_p]]] + \dots \\ &= a_p e^{-iE_p t} \end{aligned} \quad (8.64)$$

同様に、

$$e^{-iHt} a_p^\dagger e^{iHt} = a_p e^{iE_p t} \quad (8.65)$$

結果、

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{-iHt} \phi(0, \vec{x}) e^{iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t}), \quad (8.66)$$

$$\pi(t, \vec{x}) = e^{-iHt} \pi(0, \vec{x}) e^{iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} (-i a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + i a_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t}). \quad (8.67)$$

異なる時刻でも ϕ と π の交換関係がキープされていることにも注目。

さて、異なる時刻、空間の ϕ の交換関係を計算してみよう。

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \phi(0, \vec{0})] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{[a_p, a_q^\dagger] \exp(i\vec{p}\vec{x} - iE_p t) + [a_p^\dagger, a_q] \exp(-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t)}{2\sqrt{E_p E_q}} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} [\exp(i\vec{p}\vec{x} - iE_p t) - \exp(-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t)] \end{aligned} \quad (8.68)$$

右辺がローレンツ不変性なことをみてみよう。ローレンツ変換が次のように与えられたとする。

$$E' = \gamma E + \gamma\beta p_z, \quad (8.69)$$

$$p'_x = p_x, \quad (8.70)$$

$$p'_y = p_y, \quad (8.71)$$

$$p'_z = \gamma\beta E + \gamma p_z. \quad (8.72)$$

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_z}{\partial p_z} &= \gamma\beta \frac{\partial E}{\partial p_z} + \gamma \\ &= \gamma\beta \frac{p_z}{E} + \gamma \\ &= \frac{E'}{E}. \end{aligned} \quad (8.73)$$

ということで、

$$\frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} = \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p} \quad (8.74)$$

また、

$$\vec{p}\vec{x} - E_p t = -p_\mu x^\mu = -p'_\mu x'^\mu = \vec{p}'\vec{x}' - E'_p t'. \quad (8.75)$$

ということで、確かに、式 (8.68) はローレンツ不変（ローレンツ変換しても同じ形が保たれる）であることが分かる。

ローレンツスカラー場の交換関係なのでローレンツ不変になるべくしてなっている。

space-like な点

2つの座標の関係が space-like なときは、ローレンツ変換をうまく使うと計算がずっと簡単になる。時刻が同じになるような座標をとることができる。その座標系で計算すると、

$$\Delta = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-ip_z z} - e^{ip_z z}) = 0. \quad (8.76)$$

これは、結局、同時刻交換関係とローレンツ変換で関係づいているということ。この結果は直感的。 ϕ が観測量だと思えば、space-like な二点の ϕ は同時対角化できる。space-like な二点は因果関係を持つことができないということに対応している。局所因果律 (microcausality) とも呼ばれる。

time-like な点

一方、座標の関係が time-like なときは、交換関係は 0 にならない。 $t \neq 0$ として、

$$\Delta = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} (e^{-iE_p t} - e^{iE_p t}) = \frac{mK_1(imt)}{4\pi^2 it} \quad (8.77)$$

K_1 は第 2 種変形ベッセル関数。導出は省略。詳細は「演習場の量子論」(柏太郎) の第二章の演習問題 1.1 などを参照。(Im[$K_1(it)/it$] = $(\pi/2)J_1(t)/t$)

8.4.2 反粒子について (自由複素スカラー場の場合)

複素スカラー場を考えてみよう。

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)(\partial_\mu \Phi)^* - m^2 \Phi \Phi^* \quad (8.78)$$

$$[\Phi(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})] = [\Phi(t, \vec{x}), \Phi^*(t, \vec{y})] = 0, \quad (8.79)$$

$$[\Phi(t, \vec{x}), \dot{\Phi}^*(t, \vec{y})] = [\Phi^*(t, \vec{x}), \dot{\Phi}(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (8.80)$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{i\vec{p}\vec{x} - iE_p t} + b_p^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x} + iE_p t}). \quad (8.81)$$

a_p^\dagger で作れる粒子と、 b_p^\dagger で作れる粒子の二種類が出てきた。2つの粒子は反対の”電荷”を持つ。これが反粒子。場の同時刻交換関係および time-like な二点の交換関係をキープする上で非常に重要。

$$[\Phi, \Phi^*] \sim [a, a^\dagger] - [b^\dagger, b] = 0. \quad (8.82)$$

Φ は電荷 +1 を持つ。ローレンツ不変性を守るために +1 の粒子の生成演算子と -1 の粒子の消滅演算子が必要！つまりこれは反粒子が必要なことを意味している。(反粒子は自分自身であってもよい。が、その場合には保存電荷が持てなくなる。)

9 相互作用のある場の量子論について

本講義の範囲を超えるので詳しく述べられないが、相互作用のある場の量子論について概観してみよう。

9.1 相互作用の高次の項をいれると発散が出てくる

相互作用の高次の項をいれると、計算結果のいたるところに発散が出てくる。もちろん、物理的に意味のある量は有限の値を持つはずなので、発散する量をなんとか有限な量にするような処理（正規化とくりこみ）が必要になる。詳しくは場の量子論の教科書で。朝永振一郎が、場の量子論が出来ていく課程で発散の処理に悩まされる様子を日記に記している。

『計算すすめたら積分が発散した、おかしい。こういうことをやっているのだ。 U [中間子] が直接に e [電子] と ν [中性微子] にこわれずに、 U は一度 p [陽子] と n [中性子] を作り、それをさらに e と ν にこわれると考えようというのだ。ところが中間状態の p , n の状態がやたらにたくさんあって、積分が発散してしまうのである。こういう種類の発散は今まで一度も出てきていない。自己エネルギー的の発散ならめずらしくないが、どうもおかしい。』(滞独日記(朝永振一郎)より一部抜粋(1938年12月14日の日記))

9.2 場の量子論スゴイその1：電子磁気双極子モーメント

量子電磁気学 (quantum electrodynamics) を使うと、色んな量が微細構造定数 $\alpha (\simeq 1/137)$ のべき級数として計算できる。

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = c_1 \frac{\alpha}{\pi} + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + c_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + c_5 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \quad (9.1)$$

<https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.416>, Sommerfield/Petermann, 1957-1958], <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9602417>, <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0507249>, 1205.5368

9.3 場の量子論スゴイその2：ハドロンの質量スペクトル

<http://arxiv.org/abs/1203.1204>

9.4 場の量子論スゴイその3：標準模型

小林益川機構、ヒッグス機構

A $SU(2)$ リー代数について

有限次元の $n \times n$ 行列、 A_1, A_2, A_3 が交換関係

$$[A_1, A_2] = iA_3, \quad [A_2, A_3] = iA_1, \quad [A_3, A_1] = iA_2. \quad (\text{A.1})$$

を満たすとする。 A_1, A_2, A_3 がエルミートな行列に限定した場合、量子力学の回転群の時の議論が使える。その場合の解は、

$$A_i = U \begin{pmatrix} J_i^{(s_1)} & & & \\ & J_i^{(s_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i^{(s_n)} \end{pmatrix} U^\dagger \quad (\text{A.2})$$

と書けるはずだ。 U は適当なユニタリ行列であり、 $J_i^{(s)}$ はスピン s の回転の生成子である $(2s+1) \times (2s+1)$ 行列。

(ユニタリとは限らない) 正則行列 P を用いて

$$A_i = P \begin{pmatrix} J_i^{(s_1)} & & & \\ & J_i^{(s_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i^{(s_n)} \end{pmatrix} P^{-1} \quad (\text{A.3})$$

と書くと、これは非エルミートな解となっている。このように書けない非エルミートな解があるだろうか？ここでは、かならずこの形になることを行列の具体的な計算で示す。²¹

A_3 は、ある正則行列 P を用いて、ジョルダン標準形である \tilde{A}_3 に変形できる。

$$\tilde{A}_3 = P^{-1} A_3 P, \quad (\text{A.4})$$

次のような行列 \tilde{A}_\pm を定義してみよう。

$$\tilde{A}_+ = P(A_1 + iA_2)P^{-1}, \quad \tilde{A}_- = P(A_1 - iA_2)P^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

次のような関係を示すことができる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_+ - \tilde{A}_+ \tilde{A}_3 = \tilde{A}_+, \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_- - \tilde{A}_- \tilde{A}_3 = -\tilde{A}_-, \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{A}_+ \tilde{A}_- = \tilde{A}^2 - \tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_3, \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{A}_- \tilde{A}_+ = \tilde{A}^2 - \tilde{A}_3^2 - \tilde{A}_3, \quad (\text{A.9})$$

$$[\tilde{A}^2, \tilde{A}_i] = 0. \quad (\text{A.10})$$

ここで、 \tilde{A}^2 は次のように定義されている。

$$\tilde{A}^2 \equiv \tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2 + \tilde{A}_3^2 \quad (\text{A.11})$$

²¹佐藤が Physics Stack Exchange でも質問してみたところ、リー群、リー代数の定理を使った返答が帰ってきた。<https://physics.stackexchange.com/questions/711278/non-hermitian-solution-for-su2-lie-algebra> ただし、佐藤はリー群、リー代数の深い知識が無いのでちゃんと理解できていない。誰か教えてください…。

各ジョルダン細胞に対して、 \tilde{A}_3 はひとつ固有ベクトルを持つ。

$$\tilde{A}_3 v_i = \lambda_i v_i. \quad (\text{A.12})$$

この固有ベクトルに対して、次のような関係式を示せる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_+ v_i = (\tilde{A}_+ \tilde{A}_3 + \tilde{A}_+) v_i = (\lambda_i + 1) \tilde{A}_+ v_i, \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_- v_i = (\tilde{A}_- \tilde{A}_3 + \tilde{A}_-) v_i = (\lambda_i - 1) \tilde{A}_- v_i. \quad (\text{A.14})$$

これは、 $\tilde{A}_\pm v_i \neq 0$ であれば、 $\tilde{A}_\pm v_i$ が固有値 $\lambda_i \pm 1$ を持つ固有ベクトルであることを示している。 n は有限の値なので、どんな固有ベクトル v_i にたいしても、次の関係式を満たすある自然数 m_+ と m_- が存在する。

$$(\tilde{A}_+)^{m_+} v_i = 0, \quad (\tilde{A}_-)^{m_-} v_i = 0. \quad (\text{A.15})$$

v_{\max} と v_{\min} を定義しよう。

$$v_{\max} \equiv (\tilde{A}_+)^{m_+-1} v_i = 0, \quad v_{\min} \equiv (\tilde{A}_-)^{m_- - 1} v_i = 0. \quad (\text{A.16})$$

v_{\max} と v_{\min} は \tilde{A}_3 の固有ベクトルであり、その固有値をそれぞれ λ_{\max} と λ_{\min} と呼ぶことにしよう。すなわち、

$$\tilde{A}_3 v_{\max} = \lambda_{\max} v_{\max}, \quad \tilde{A}_3 v_{\min} = \lambda_{\min} v_{\min}. \quad (\text{A.17})$$

式 (A.9) と $A_+ v_{\max} = 0$ を使うと、

$$\tilde{A}^2 v_{\max} = (\tilde{A}_3^2 + \tilde{A}_3) v_{\max} = (\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\max}) v_{\max}. \quad (\text{A.18})$$

同様に、式 (A.8) と $A_- v_{\min} = 0$ を使うと、

$$\tilde{A}^2 v_{\min} = (\tilde{A}_3^2 - \tilde{A}_3) v_{\min} = (\lambda_{\min}^2 - \lambda_{\min}) v_{\min}. \quad (\text{A.19})$$

すなわち、 v_{\max} と v_{\min} は \tilde{A}^2 の固有ベクトル。次の関係式を満たす N が存在する。

$$v_{\min} \propto (\tilde{A}_-)^{N-1} v_{\max}. \quad (\text{A.20})$$

また、式 (A.10) を使うと、

$$\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\max} = \lambda_{\min}^2 - \lambda_{\min}, \quad (\text{A.21})$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_{\max} - N + 1. \quad (\text{A.22})$$

この関係式を解くことにより、

$$\lambda_{\max} = -\lambda_{\min} = \frac{N-1}{2}. \quad (\text{A.23})$$

を得る。ここまでで、次の性質をみたす固有ベクトル v_k ($k = 1, 2, \dots, N (= 2\lambda_{\max} + 1)$) の集合を得た。

$$\tilde{A}_3 v_k = (\lambda_{\max} - k + 1) v_k, \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{A}^2 v_k = \lambda_{\max} (\lambda_{\max} + 1) v_k, \quad (\text{A.25})$$

$$\tilde{A}_+ v_k \propto v_{k-1}, \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{A}_- v_k \propto v_{k+1}. \quad (\text{A.27})$$

v_k たちはノルムが1のベクトルだとしよう。交換関係を使って、次の関係式が示せる。

$$\tilde{A}_+ \tilde{A}_- v_k = (\tilde{A}^2 - \tilde{A}_3 + \tilde{A}_3) v_k = k(2\lambda_{\max} - k + 1) v_k, \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{A}_- \tilde{A}_+ v_{k+1} = (\tilde{A}^2 - \tilde{A}_3 - \tilde{A}_3) v_k = k(2\lambda_{\max} - k + 1) v_k. \quad (\text{A.29})$$

式 (A.26, A.27, A.28, A.29) を満たすには次の関係式が満たされている。

$$\tilde{A}_- v_k = z_k \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v_{k+1}, \quad (\text{A.30})$$

$$\tilde{A}_+ v_{k+1} = z_k^{-1} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v_k. \quad (\text{A.31})$$

z_k は未知の複素数。 $v'_i \equiv r_i v_i$ を定義すると、

$$\tilde{A}_- v'_k = \frac{r_k z_k}{r_{k+1}} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v'_{k+1}, \quad (\text{A.32})$$

$$\tilde{A}_+ v'_{k+1} = \frac{r_{k+1}}{r_k z_k} \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} v'_k. \quad (\text{A.33})$$

を得る。すなわち、 $r_k z_k / r_{k+1} = 1$ を満たすような r_k を定義できる。これは P を次のように変更することに相当する。

$$P \rightarrow P \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_N \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

ここからは、式 (A.30, A.31) において $z_i = 1$ が満たされるように P が選ばれているとする。この v_i の基底では、 \tilde{A}_i は

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} J_i^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.35})$$

と書かれる。 $J_3^{(\lambda_{\max})}$ はスピン (or 角運動量) λ_{\max} 表現の z 軸まわり回転の生成子。

大きさが 2×2 以上のジョルダン細胞があったとしよう。これは次のような性質を満たすベクトル u_k (ただし v_k とは直交) の存在を意味する。

$$\tilde{A}_3 u_k = (\lambda_{\max} - k + 1) u_k + v_k. \quad (\text{A.36})$$

式 (A.6) を使うと、次の式が示せる。

$$\tilde{A}_3 \tilde{A}_{\pm} u_k = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) \tilde{A}_{\pm} u_k + \tilde{A}_{\pm} v_k. \quad (\text{A.37})$$

ということは次の性質を持つ $u_{k\pm 1}$ が存在する。

$$\tilde{A}_3 u_{k\pm 1} = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) u_{k\pm 1} + v_{k\pm 1}. \quad (\text{A.38})$$

どんな x に対しても、次の関係が満たされることに注意。

$$\tilde{A}_3 (u_{k\pm 1} + x v_{k\pm 1}) = (\lambda_{\max} - k + 1 \pm 1) (u_{k\pm 1} + x v_{k\pm 1}) + v_{k\pm 1}. \quad (\text{A.39})$$

式 (A.37, A.38, A.39) を比較すると、 $u_{k\pm 1}$ は $\tilde{A}_\pm u_k$ と $v_{k\pm 1}$ の線型結合であるはず。 $\tilde{A}_\pm u_k$ の係数は式 (A.30, A.31) から決定できるが、 $v_{k\pm 1}$ の係数は分からない。ということで、未知の数 x_k と y_k を用いて、

$$\tilde{A}_- u_k = \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} u_{k+1} + x_k v_{k+1}, \quad (\text{A.40})$$

$$\tilde{A}_+ u_{k+1} = \sqrt{k(2\lambda_{\max} - k + 1)} u_k + y_k v_k. \quad (\text{A.41})$$

と書ける。

式 (A.24, A.36, A.38) を使うと、 v_k, u_k の基底で \tilde{A}_3 は次のように書ける。

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} J_3^{(\lambda_{\max})} & I & \cdots \\ 0 & J_3^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

ただし $J_3^{(\lambda_{\max})}$ はスピン (or 角運動量) λ_{\max} 表現における z 軸まわり回転の生成子。式 (A.30, A.31, A.41, A.40) を使うと、 v_k, u_k 基底では、 \tilde{A}_\pm は次のように書ける。

$$\tilde{A}_+ = \begin{pmatrix} J_+^{(\lambda_{\max})} & X_+ & \cdots \\ 0 & J_+^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_- = \begin{pmatrix} J_-^{(\lambda_{\max})} & X_- & \cdots \\ 0 & J_-^{(\lambda_{\max})} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

これを使うと次のような式をえる。

$$[\tilde{A}_+, \tilde{A}_-] = \begin{pmatrix} [J_+^{(\lambda_{\max})}, J_-^{(\lambda_{\max})}] & Z & \cdots \\ 0 & [J_+^{(\lambda_{\max})}, J_-^{(\lambda_{\max})}] & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

ただし

$$Z = J_+^{(\lambda_{\max})} X_- + X_+ J_-^{(\lambda_{\max})} - J_-^{(\lambda_{\max})} X_+ - X_- J_+^{(\lambda_{\max})}. \quad (\text{A.45})$$

容易に次の式が示せる。

$$\text{tr} Z = 0. \quad (\text{A.46})$$

式 (A.42) と比較すると

$$[\tilde{A}_+, \tilde{A}_-] \neq \tilde{A}_3. \quad (\text{A.47})$$

となり矛盾する。つまり式 (A.36) を満たす u_k は存在せず、ジョルダン細胞の大きさは 1×1 。 \tilde{A}_3 は対角化可能。

B 場の量子論を勉強した後に相対論的量子力学を振り返ってみる。

西島和彦の教科書のはしがきにあるようにディラック方程式だけ議論して相対論的量子力学と呼ぶのは「羊頭狗肉」の感がある。本当は場の量子論まで行かないと、相対論的な量子力学は作れていない。場の量子論を学んだあとしばらくたってからディラック方程式の導出の議論をみると良く分からなくなってしまう (少なくとも筆者はそうでした)。せっかくの機会なので、場の量子論の内容と講義の内容の関係をまとめておく。この章は、場の量子論の最初の方をある程度勉強した人向けに書いてあります。Peskin-Schroeder でいうと section 3 くらいまで読んでいれば読めると思います。

B.1 確率解釈とディラックスピノル

フェルミオンを量子化する。

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (a_{p,s} u_s(p) e^{-ipx} + b_{p,s}^\dagger v_s(p) e^{ipx}). \quad (\text{B.1})$$

フェルミオン数に関する $U(1)$ 対称性があると、ネーターの定理から次の保存カレントが導ける。

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (\text{B.2})$$

つまり、確率密度と解釈していた $\rho = \psi^\dagger \psi = j^0$ は、電荷密度になっている。フェルミオンの一粒子状態 $a_{p,s}^\dagger |0\rangle$ で張られた部分空間だけで考えれば、電荷密度である ρ は、粒子を場所 x に見出す確率密度と同定できることになる。

$$\psi_{cl} \equiv \langle 0 | \psi(x) | i \rangle \quad (\text{B.3})$$

B.2 確率解釈できないと言って捨てたはずのクラインゴルドン方程式について

複素スカラー場についてもネーターカレントを導出できる。

$$j^\mu = i\Phi^\dagger (\partial^\mu \Phi) - i(\partial^\mu \Phi^\dagger) \Phi. \quad (\text{B.4})$$

確率密度と解釈しかけたものは、ここでもやはり電荷密度。

B.3 ディラックの海はどこへ行った

C ジグザグ運動 (Zitterbewegung、ツィッターベヴェーグンク)

D 水素原子の微細構造

クーロンポテンシャル中の電子のエネルギースペクトルを求めてみよう。ディラック方程式を使うと相対論的な補正が計算できる。

https://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure#Exact_relativistic_energies

D.1 角運動量とパリティで固有状態を整理しよう

水素原子の束縛状態のエネルギーは以下のように書けた。

$$E = -\frac{\alpha m}{2n^2} \quad (\text{D.1})$$

束縛エネルギーは主量子数だけで決まっていた。たとえば、 $2p$ 軌道で全角運動量が $j = 1/2$ のものと $j = 3/2$ のものが縮退している。どんな状態があったか、保存されている良い量子数で分類してみよう。

波動関数 ψ のパリティ変換を次のように定義すると、

$$\psi_P(t, \vec{x}) \equiv \beta \psi(t, -\vec{x}). \quad (\text{D.2})$$

ψ が

$$E\psi = (\vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m\beta + V(r))\psi \quad (\text{D.3})$$

を満たすなら、 ψ_P も同じ方程式を満たすことが分かる。よって、角運動量とパリティで状態を分類するのが良いことが分かる。パリティ変換の定義から、上2成分がパリティevenで下2成分がパリティodd。角運動量 $j-1/2$ と $1/2$ の合成は次のようになる。

$$|j, m\rangle_1 = \sqrt{\frac{j+m}{2j}} \left| j - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \left| j - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{D.4})$$

$$|j, m\rangle_2 = \sqrt{\frac{j+1-m}{2j}} \left| j + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{j+1+m}{2j}} \left| j + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{D.5})$$

$$P|j, m\rangle_1 = (-1)^{j-1/2} |j, m\rangle_1, \quad P|j, m\rangle_2 = (-1)^{j+1/2} |j, m\rangle_2. \quad (\text{D.6})$$

$$\Phi_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+m} Y_{j-1/2}^{m-1/2} \\ \sqrt{j-m} Y_{j-1/2}^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$$\Phi_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1+m} Y_{j+1-1/2}^{m-1/2} \\ \sqrt{j+1-m} Y_{j+1-1/2}^{m+1/2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\psi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} u(r)\Phi_{\pm} \\ -iv(r)\Phi_{\pm} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

(もろもろの計算)

まとめると、動径方向の波動関数は次のように与えられる。(k は整数)

$$(E - m - V(r))u(r) + \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right)v(r) = 0, \quad (\text{D.10})$$

$$(E + m - V(r))v(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right)u(r) = 0. \quad (\text{D.11})$$

D.2 クーロンポテンシャル中の動径方向の波動関数

クーロンポテンシャル

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (\text{D.12})$$

を代入してみよう。次のような微分方程式が得られる。

$$\left(E - m + \frac{Ze^2}{r} \right) u(r) + \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right) v(r) = 0, \quad (\text{D.13})$$

$$\left(E + m + \frac{Ze^2}{r} \right) v(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right) u(r) = 0. \quad (\text{D.14})$$

がえられる。束縛状態の波動関数を計算したい。水素原子で計算したときみたいに

- 原点で波動関数が発散しない
- 遠方で波動関数が指数関数的に落ちていく

の2点を要求し、どのようなエネルギー固有値 E がえられるか計算していく。まず、式 (D.13) と式 (D.14) は、原点付近 ($r \simeq 0$) で

$$\frac{du}{dr} \simeq -\frac{k}{r}u(r) - \frac{Ze^2}{r}v(r), \quad (\text{D.15})$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq \frac{k}{r}v(r) - \frac{Ze^2}{r}u(r). \quad (\text{D.16})$$

これを解くと、

$$u \propto r^\gamma, \quad v \propto r^\gamma, \quad \gamma \equiv \sqrt{k^2 - Z^2e^4} \quad (\text{D.17})$$

また、 r が大きいところ ($r \simeq \infty$) で

$$\frac{du}{dr} \simeq -(E+m)v(r), \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{dv}{dr} \simeq (E-m)u(r). \quad (\text{D.19})$$

これを解くと、

$$u \propto e^{-\lambda r}, \quad v \propto e^{-\lambda r}, \quad \lambda \equiv \sqrt{m^2 - E^2} \quad (\text{D.20})$$

$u(r)$ と $v(r)$ を次のように書いてみよう。

$$u = r^\gamma e^{-\lambda r} \tilde{u}(r), \quad v = r^\gamma e^{-\lambda r} \tilde{v}(r). \quad (\text{D.21})$$

\tilde{u} と \tilde{v} に対して、次のような微分方程式をえる。

$$\left(E - m + \frac{Ze^2}{r}\right) \tilde{u}(r) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{\gamma - k}{r} - \lambda\right) \tilde{v}(r) = 0, \quad (\text{D.22})$$

$$\left(E + m + \frac{Ze^2}{r}\right) \tilde{v}(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{\gamma + k}{r} - \lambda\right) \tilde{u}(r) = 0. \quad (\text{D.23})$$

\tilde{u} と \tilde{v} は r に関する有限次の多項式になっていると、欲しい性質が満たせる。

$$\tilde{u} = \sum_{n=0}^N a_n r^n, \quad \tilde{v} = \sum_{n=0}^N b_n r^n. \quad (\text{D.24})$$

$n \geq 1$ に対し、次のような漸化式がえられる。

$$(E - m)a_{n-1} + Ze^2 a_n + (n + \gamma - k)b_n - \lambda b_{n-1} = 0, \quad (\text{D.25})$$

$$(E + m)b_{n-1} + Ze^2 b_n - (n + \gamma - k)a_n + \lambda a_{n-1} = 0. \quad (\text{D.26})$$

$\lambda/(E - m) \times$ 式 (D.25) $-$ 式 (D.26) を計算すると、 a_{n-1} と b_{n-1} が同時に消せる。結果、 a_n と b_n が次のように関係づけることが分かる。

$$\left(\frac{\lambda Ze^2}{E - m} + n + \gamma - k\right) a_n + \left(\frac{\lambda}{E - m}(n + \gamma - k) - Ze^2\right) b_n = 0. \quad (\text{D.27})$$

$a_{N+1} = b_{N+1} = 0$ を用いると、

$$\left(\frac{\lambda Ze^2}{E-m} + n + \gamma - k\right) a_n + \left(\frac{\lambda}{E-m}(n + \gamma - k) - Ze^2\right) b_n = 0, \quad (\text{D.28})$$

$$(E-m)a_n - \lambda b_n = 0. \quad (\text{D.29})$$

$a_N \neq 0$, $b_N \neq 0$ となるには、

$$-\lambda \left(\frac{\lambda Ze^2}{E-m} + n + \gamma - k\right) - (E-m) \left(\frac{\lambda}{E-m}(n + \gamma - k) - Ze^2\right) = 0. \quad (\text{D.30})$$

これを整理すると、

$$\frac{n - k + \sqrt{k^2 - Z^2 e^4}}{Ze^2} = \frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}} \quad (\text{D.31})$$

これを解くと、

$$E = m \times \left(1 + \left(\frac{Ze^2}{n - k + \sqrt{k^2 - Z^2 e^4}}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (\text{D.32})$$

k に $j + 1/2$ を代入して、

$$E_{n,j} = m \times \left(1 + \left(\frac{Ze^2}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2 e^4}}\right)^2\right)^{-1/2}. \quad (\text{D.33})$$

というエネルギー解がえられた。さて、この式を $Ze^2 \ll 1$ として、摂動展開してみよう。 Ze^2 の 4 次まで計算すると、次のような式がえられる。

$$E_{n,j} = m - \frac{mZ^2 e^4}{2n^2} + \frac{mZ^4 e^8}{n^4} \left(\frac{3}{8} - \frac{n}{2(j + 1/2)}\right) + \mathcal{O}(Z^6 e^{12}). \quad (\text{D.34})$$

右辺の第 1 項は電子の静止エネルギーである。第 2 項はシュレーディンガー方程式から得られるエネルギー準位に等しいことが分かる。第 3 項が相対論的な効果からの補正とみなせる。特に、 n が同じでも j の値が違えば準位の縮退が解けることがみてとれる。たとえば、 $2p$ 軌道が $j = 1/2$ と $3/2$ の 2 つに分裂する。

波動関数は超幾何級数を使って書ける。詳細は例えば、相対論的量子力学（西島和彦）。

参考文献

- [1] H. K. Dreiner, H. E. Haber and S. P. Martin, “Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry,” Phys. Rept. **494**, 1-196 (2010) [arXiv:0812.1594 [hep-ph]].
- [2] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **117**, 610-624 (1928)
- [3] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, “ADLER-BELL-JACKIW ANOMALY AND WEYL FERMIONS IN CRYSTAL,” Phys. Lett. B **130**, 389-396 (1983)

- [4] 風間 洋一, “ゲージ対称性と現代物理学”, [http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/gaugesym\(suuri-kagaku\).pdf](http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/gaugesym(suuri-kagaku).pdf)
- [5] 深谷英則, “なぜ、量子重力は(QCD に比べて) 難しいのか?”, 素粒子論研究・電子版 **25** (2016) No. 2
- [6] J. S. Schwinger, “On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” Phys. Rev. **73**, 416-417 (1948)
- [7] 遠藤基, 岩本祥, 北原鉄平, “此のたびのミューオン異常磁気能率～おぼろげながら, しかしはっきりと浮かんできたミューオン $g - 2$ アノマリー～”, 高エネルギーニュース **40** (2021) No. 2
- [8] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations,”
- [9] E. H. Wichmann and J. H. Crichton, “Cluster Decomposition Properties of the S Matrix,” Phys. Rev. **132**, no.6, 2788-2799 (1963)
- [10] B. Bakamjian and L. H. Thomas, “Relativistic particle dynamics. 2,” Phys. Rev. **92**, 1300-1310 (1953)