

平成 26 年度

前期日程

専門理科問題

〔注意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 問題冊子は、物理、化学の順序で一冊にまとめてある。

問題は { 物理 1 ページから 13 ページ }
 { 化学 14 ページから 19 ページ } にある。

ページの脱落があれば直ちに申し出ること。

3. 解答用紙は、物理 8 枚、化学 2 枚と一緒に折り込まれている。受験する科目の解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
4. 物理学科を志望する者は、物理を解答すること。
化学科を志望する者は、化学を解答すること。
生物科学科生命理学コースを志望する者は、物理、化学の 2 科目のうちから 1 科目を選んで解答すること。
5. 受験番号は、受験する科目の解答用紙の受験番号欄に 1 枚ずつ正確に記入すること。
6. 解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。
7. 問題冊子の余白は、適宜下書きに使用してもよい。
8. 配付した解答用紙は持ち帰ってはいけない。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

物 理 問 題

(解答はすべて専門物理解答用紙に記入すること)

[1] 地球を周回する人工衛星の存在を意識する機会は少ないが、私たちの日常生活は、気象観測、全地球測位システム (GPS) の活用、通信衛星や放送衛星の利用など、人工衛星の恩恵を多く受けている。このような観測や通信の機器を、地球を周回する軌道上にのせて人工衛星とするには、ロケットの使用が不可欠である。ここでは、人工衛星の運動とロケットによる加速について考える。以下では、地球は半径 R の球とし、地表での重力加速度の大きさを g とする。なお、実際の人工衛星の運動とロケットによる加速では、地球の自転や空気抵抗なども考慮する必要があるが、簡単のため、地球は宇宙空間に静止し、回転していないとし、空気抵抗も無視することにする。

I. 地球を周回する人工衛星の運動を考える際に参考になる数値として、第一宇宙速度がある。第一宇宙速度 v_1 は、円軌道を描きながら、地表すれすれに水平方向に飛行する人工衛星の速さと定義される。

問 1 第一宇宙速度 v_1 を R と g を用いて表せ。

問 2 第一宇宙速度 v_1 を有効数字 2 桁で計算し、[km/s] の単位で求めよ。
計算では、 $R = 6400$ km, $g = 9.8$ m/s² とせよ。

II. 次に、ロケットにより機器を水平方向に加速し、第一宇宙速度以上の速さにする過程について考える。ロケットは、燃料の燃焼で生じる高速のガスをノズルから噴射し、その反動で加速を行う。以下では、ガスの噴射による加速の原理を理解するため、摩擦が無視できるなめらかな水平面上で、ばねの力で小物体を打ち出して加速する過程を考える。この打ち出される小物体は、ロケットが噴射するガスに相当する。まず、単純な加速過程を考えよう。

問 3 ロケットが噴射するガスに相当する、質量 m の小物体 A を考える。小物体 A には、質量が無視できるばね (ばね定数 k) が水平に取り付けら

れている。図 1 のように、なめらかな水平面上に小物体 A をおき、固定された壁にばねの端を押し当て、ばねを自然長 l から長さ x だけ縮めてから静かにはなした。ばねの力で小物体 A は加速される。ばねが壁を離れた後の小物体 A の速さ V_A を求めよ。

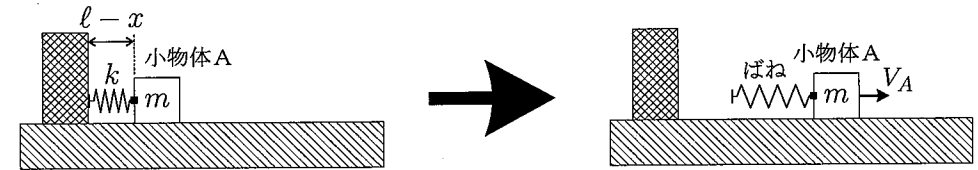


図 1

問 4 次に、ロケットに相当する小物体 B を用意し、図 2 のように、問 3 の小物体 A を押し当て、ばねの自然長 l から長さ x だけ縮めてから静かにはなした。小物体 B は、小物体 A の n 倍 ($n \geq 1$) の質量を持つ。2 つの小物体が最初静止していた場合、ばねが小物体 B から離れた後に小物体 B が持つ速さ V_B を、 n と問 3 の V_A を用いて表せ。

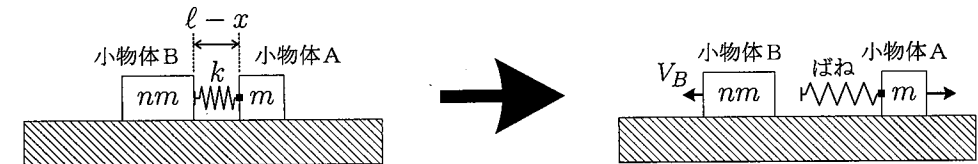


図 2

III. 問 3 の速さ V_A は、ロケットが噴射するガスの速さに相当するが、実際のガスの速さは、たかだか 3 から 4 km/s であることが知られている。したがって、問 4 の加速過程で得られる速さ V_B は、第一宇宙速度 v_1 に達しない。

そこで以下では、実際のロケットにより近い加速過程を考える。図 3 のように、ロケットが噴射するガスに相当するものとして、問 3 のばねを取り付けた、質量 m の小物体 G を N 個用意し、互いに連結する。また、人工衛星になる機器に相当する、質量 m の小物体 S を用意し、左端に置き小物体 G と連結する。このとき、すべてのばねは自然長 l から長さ x だけ縮んでいる。連

結した N 個の小物体 G と小物体 S は、摩擦のないなめらかな水平面上で、最初静止していた。その後、図の右端から 1 個ずつ小物体 G の連結を解き、順次放出することで加速を行う。放出される小物体 G 以外の小物体は、小物体間の連結により、加速中は変形せず一体となって運動するものとする。なお、この設定は、人工衛星になる機器の質量の、 N 倍の質量のロケット燃料を用意することに相当する。

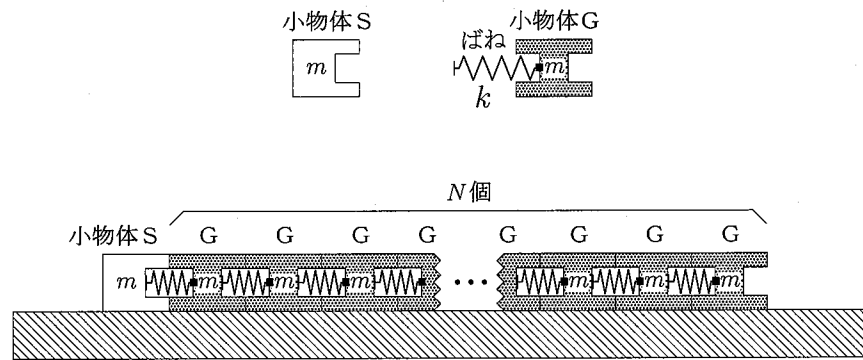


図 3

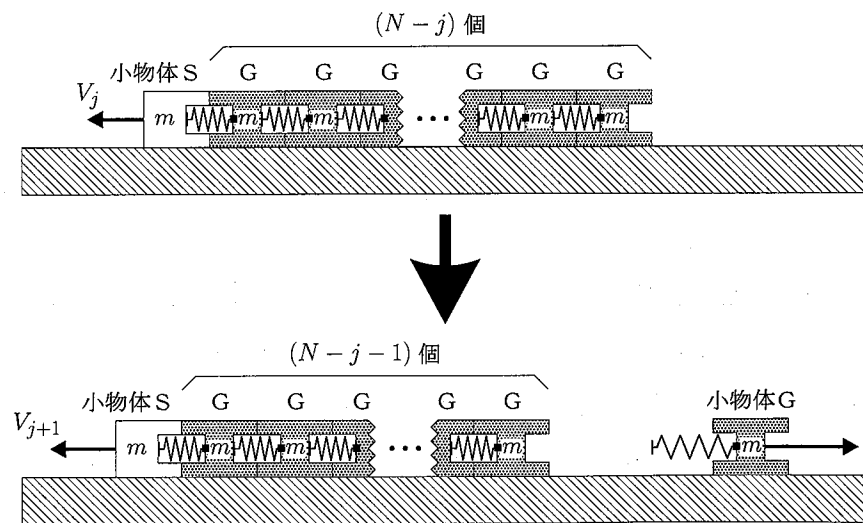


図 4

問 5 図 4 のように、小物体 G を j 個放出した後の、小物体 S の速さが V_j のとき、さらに小物体 G を 1 個放出すると、小物体 S の速さは V_{j+1} になった。速さ V_j と V_{j+1} の関係を求めよ。解答では問 3 の V_A を用いよ。

問 6 N 個の小物体 G をすべて放出した後の、小物体 S の速さ V_S を求めよ。解答では、下に定義する級数の和 S_N を用いよ。

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(N-1)N}} + \frac{1}{\sqrt{N(N+1)}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$$

問 7 問 5 と問 6 で考えた加速過程は、ロケット燃料の質量が、人工衛星となる機器の質量の N 倍の場合に相当し、 V_A はロケットが噴射するガスの速さに相当する。 $V_A = 3.0 \text{ km/s}$ のとき、問 6 の最終的なロケットの速さ V_S が、第一宇宙速度以上になるための N の条件を求めよ。図 5 のグラフは、横軸を N にとり、問 6 で定義した S_N の値を縦軸にプロットしたものである。解答では、このグラフから読み取った数値を用いよ。

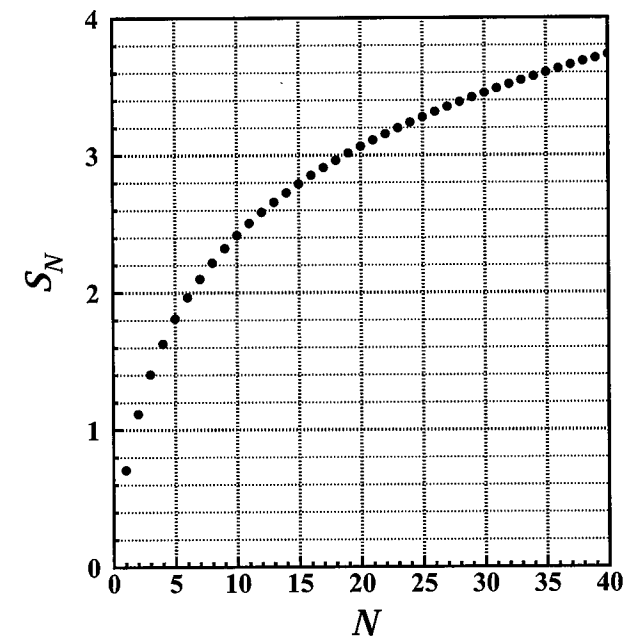


図 5

問 8 ばねがもともと持っていたエネルギーの合計を E_0 とし、最終的に小物体 S が持つ運動エネルギーを E_S とすると、その比 $\alpha = \frac{E_S}{E_0}$ はロケットによる加速のエネルギー効率を表わしている。この効率 α を m , V_A , N , S_N のうち必要なものを用いて表せ。また、 $N = 10$ と $N = 30$ の場合について、効率 α の値を有効数字 2 桁で計算せよ。

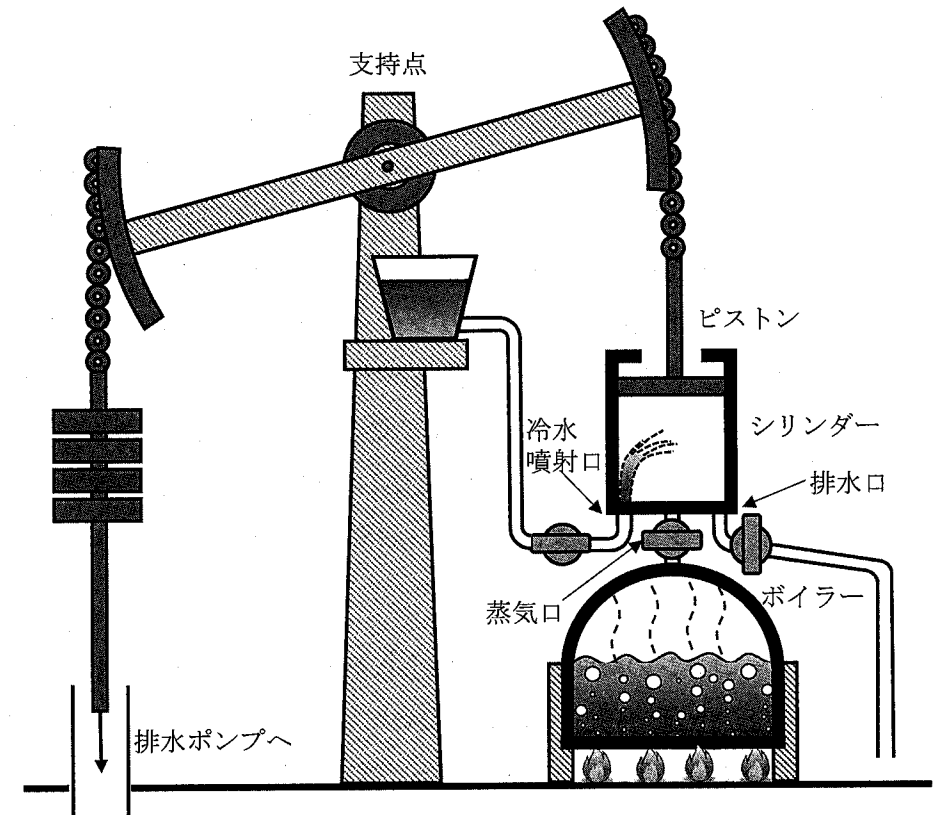
問 9 これまでの結果を参考にし、機器をロケットで加速し人工衛星とする場合、ロケットの設計上配慮すべき重要な点について、自由に論述せよ。

〔2〕 熱機関の発明、改良は、産業革命の進展と密接に結びついている。17世紀から18世紀にかけて炭鉱の開発が盛んになったヨーロッパで、坑内の水をくみ出す排水ポンプを蒸気力で動かす蒸気機関が開発された。特に18世紀に入り、イギリス人ニューコメンによって実用化されたニューコメンの機関は、ヨーロッパ各地で広く使われるようになった。

ニューコメン機関では、図のように、水蒸気を発生するボイラーの上に、ピストンをはめこまれた円筒縦型のシリンダーが取り付けられている。ピストンは、支持点の周りで回転する棒を通して、排水ポンプに連結されている。まず、ボイラーとシリンダーをつなぐ蒸気口の栓を開くと、シリンダー内に水蒸気が導入される。水蒸気の圧力、排水ポンプからの荷重、大気圧がほぼ釣りあった状態でピストンは上昇し、やがて最高点に達する。次に、蒸気口の栓を閉じ、シリンダー内に開口している冷水噴射口から冷水を噴射すると、シリンダー内の水蒸気は冷えて水になる。図はこの状態を示している。このため、シリンダー内の圧力が急激に低下し、ピストンは大気圧によって押し下げられる。このピストンの下降運動を利用して、排水をくみ上げるわけである。ピストンが最下点まで戻ったところで、水をシリンダーの外に排出し、最初の状態に戻り、1サイクルが完了する。これを繰り返してピストンを上下に運動させ、排水ポンプを動かす。ニューコメン機関では、シリンダー内の水蒸気の圧力は大気圧程度ないしはそれ以下であり、「大気圧機関」ともいわれる。高圧の水蒸気を扱わないため、安全性に優れていた点が特徴であった。ただし、ニューコメン機関の効率はあまり高いものではなく、1パーセント以下であったといわれる。

ニューコメン機関を改良し、その効率を劇的に向上させたのがイギリス人ワットである。ワットは、グラスゴー大学の技術職員であった。当時、グラスゴー大学では、実物を忠実に縮小したニューコメン機関の精巧なミニチュアを導入したが、なぜか、このミニチュアが何の故障もないにもかかわらず実際には動作しないというトラブルに見舞われた。ワットは、ボイラーの火力を非常に強くし多量の水蒸気を供給すると、このミニチュアも何とか動くことを見つけ、ミニチュアが動作しない原因をつきとめた。ワットは、この

知見をさらにおし進め、ニューコメン機関の仕組みに改良を加えた新たな蒸気機関を作製した。このワットの機関は、産業革命において大きな役割を果たし、イギリスの石炭採掘量はこの発明によって10倍になったともいわれている。以下の問に答えよ。



問 1 ニューコメン機関の使用用途である排水のくみ上げは、大気圧下でのピストンの下降にともなう行われる。最高点から最下点まで下降する際、大気がピストンを押し下げてした仕事 [J] を有効数字1桁で求めよ。シリンダー断面の半径を0.3m、シリンダー底面から計ったピストンの最高点の高さを2mとする。ただし、冷水噴射による水蒸気の凝縮の後、シリンダー内は真空に近い状態になったものとし、ピストンの最下点での水の体積は小さくて無視できるものとする。ピストンの質量は無視してよい。大気圧を1気圧 = $1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ とせよ。

- 問 2 ピストンが最高点にあるときの冷水噴射によって、気体の水蒸気は液体の水となる。問 1 のサイズのシリンダーにおいて、シリンダー内の 100°C の水蒸気がすべて 40°C の水になるとして、その際放出する熱量 [J] を有効数字 1 桁で求めよ。 100°C 、1 気圧の水蒸気の密度を 0.60 kg/m^3 、1 気圧での水の単位質量当たりの蒸発熱を $2.3 \times 10^6 \text{ J/kg}$ 、水の比熱を $4.2 \times 10^3 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ とせよ。
- 問 3 ピストンが最高点にあるとき噴射される冷水は、熱機関における低温物体として働く。冷水が吸収する熱量としては、水蒸気が水になる際に放出する熱に加え、シリンダー内壁やピストン底部が冷水噴射によって冷やされる際に放出する熱もある。今、問 1 のサイズのシリンダーにおいて、冷水噴射によってシリンダー内壁やピストン底部が 100°C から 40°C に冷やされたとしよう。このシリンダー内壁やピストン底部の温度低下は、表面から厚み 5 mm の部分でのみ一様に起きるとして、シリンダー内壁やピストン底面が放出した熱量 [J] を有効数字 1 桁で求めよ。シリンダーおよびピストンの素材の単位体積当たりの熱容量を $3 \times 10^6 \text{ J/(m}^3 \cdot \text{K)}$ とする。
- 問 4 ニューコメンの機関を忠実に縮小したミニチュアが動かなかった理由は何か。問 1 から問 3 の結果を参考にしつつ、現実の機関で重要になり得る効果等も考慮し、自由な発想で推察せよ。
- 問 5 諸君も、ワットにならって、ニューコメン機関の改良を試みよ。ただし、ここで対象としている改良は、水蒸気を用いたニューコメン機関の「大気圧機関」としての性格を保った、当時の技術でも可能な機関の仕組みに関する改良である。図等を用いて、諸君が提案する新しい仕組みを説明したうえで、それが効率を向上させると期待する理由を述べよ。

〔3-1〕 純粋な半導体に不純物を適度に含めることによってキャリアを生成し、n型またはp型の半導体になると、電流を流すことができる。以下の問に答えよ。

問1 n型とp型、それぞれの半導体において、どのようなキャリアがどのようなエネルギーバンド（エネルギー帯）に分布するのか、以下に示す用語を用いて説明せよ。なお、() 内に示された用語を代わりに用いてもよい。

【電子、ホール（正孔）、伝導帯（空帯）、充満帯（価電子帯）】

これらのキャリアは、さまざまな速度で半導体中を熱運動している。一方、半導体には不純物が含まれることや、半導体を構成する原子が熱振動をしているために、キャリアは頻りに散乱される。そのため、電流を流そうとしてもキャリアの運動が妨げられて抵抗（電気抵抗）が発生する。以下の実験を行うことにより、これらのキャリアの動きを調べることができる。

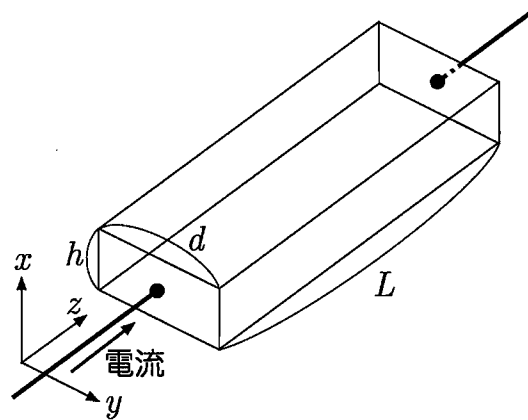


図1

まず、n型またはp型の半導体を、図1のように厚さ h [m]、幅 d [m]、長さ L [m] の細長い直方体に加工し、その両端に電圧 V_0 [V] をかけて、 z 軸の正の方向に流れる電流を測定した。この半導体におけるオームの法則

について考えてみよう。キャリアの電荷は q [C] で、その絶対値の大きさは電気素量に等しいとする。キャリアの質量を m [kg] とし、その数密度を N [/m³] とする。

ここでは以下の考え方で、半導体中のキャリアの運動を考察してみよう。あるひとつのキャリアに着目し、それが受ける散乱と次に受ける散乱の間の時間を Δt [s] とする。 Δt の値は散乱のたびに異なるが、その平均を T [s] とすると、キャリアは単位時間あたり $\frac{1}{T}$ 回散乱されることになる。ただし、散乱のたびに、キャリアの速度は散乱以前の速度とは無関係な速度に変化し、速度の平均はゼロになって電流は流れない。しかし、半導体に電圧 V_0 をかけると、その電場（電界）から受ける力によって、散乱と次の散乱の間にキャリアの速度が変化して、電流が流れるようになる。以下の問にしたがって、その詳細を考えてみよう。

問2 電場から受ける力により生ずる、キャリアの加速度の z 成分を求めよ。

問3 キャリアが、ある時刻 t に散乱され、その次の散乱が時刻 $t + \Delta t$ に起こったとしよう。時刻 t の散乱直後の速度の z 成分を v_0 とするとき、 Δt の間の、キャリアの z 座標の変化を求めよ。

ひとつのキャリアに着目すると、 Δt の平均は T であるが、 $(\Delta t)^2$ の平均は $2T^2$ となることが知られている。

問4 問3で求めた Δt の間のキャリアの z 座標の変化について、その平均を求めることにより、 z 軸の正の方向のキャリアの平均速度を求めよ。ただし、電場がかかっていないときのキャリアの平均速度はゼロであることに注意せよ。

問5 問4の結果を用いて、この半導体に流れる電流を求めよ。

問 6 この半導体の抵抗 $[\Omega]$ と抵抗率 $[\Omega \cdot \text{m}]$ をそれぞれ求めよ。

しかし、抵抗を調べる実験だけでは q の符号や、 T や N の値を知ることはできない。そこで、図 1 の半導体を、図 2 のように x 軸の正の方向を向いた一様な磁束密度 B $[\text{Wb}/\text{m}^2]$ の磁場 (磁界) の中におき、 z 軸の正の方向に電流 I $[\text{A}]$ を流した。半導体の側面の点 a と点 b に接続した電圧計で、磁場によって発生した電圧 V $[\text{V}]$ を測定した。ただし、点 a と点 b の z 座標は等しく、点 a の電位が点 b より高いとき、 V を正とする。また、流した電流による磁場は考えなくてよい。

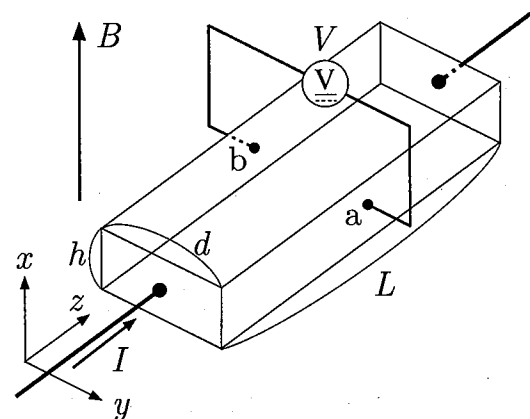


図 2

問 7 n 型の半導体では、電圧 V の符号は正となるか負となるか答えよ。

問 8 キャリアの数密度 N を電圧 V を用いて表せ。

この測定で N の値が得られ、さらに、先ほどの測定で得られた抵抗の値を用いると、 T の値を求めることができる。具体的な数値を与えて、それらを求めてみよう。

問 9 半導体のサイズを $h = 2 \times 10^{-4} \text{ m}$, $d = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $L = 2 \times 10^{-2} \text{ m}$ とし、磁場をかけない状態で $V_0 = 1 \text{ V}$ の電圧をかけたところ、 $1 \times 10^{-3} \text{ A}$ の電流が流れた。次に、 $I = 1 \times 10^{-3} \text{ A}$ の電流を保ちつつ磁場をかけたとこ、 $B = 1 \times 10^{-1} \text{ Wb}/\text{m}^2$ において $V = 5 \times 10^{-4} \text{ V}$ の電圧が発生した。 $|q| = 2 \times 10^{-19} \text{ C}$, $m = 1 \times 10^{-30} \text{ kg}$ として、 N と T の値をそれぞれ有効数字 1 桁で求めよ。

[3-2] 放射性同位体の崩壊について、以下の問に答えよ。

I. 不安定な原子核は、放射線を放出して、より安定な原子核に崩壊していく。放射線を出す性質をもった同位体を放射性同位体と呼ぶ。放射性同位体の崩壊には、 α 崩壊、 β 崩壊および γ 崩壊の3種類がある。

問 10 原子番号の変化、質量数の変化、放射線の種類について述べながら、それぞれの崩壊を説明せよ。

II. ある放射性同位体の崩壊を考える。単位時間あたりに崩壊する原子核の数は、その放射性同位体の原子核の数に比例する。このときの比例定数は、放射性同位体ごとに決まっており、崩壊定数 λ [1/s] とよばれる。時刻 $t = 0$ の放射性同位体の原子核の数を N_0 とする。以下、放射性同位体の崩壊をごく短い時間 Δt [s] に分割して考えていく。ただし、 $\lambda\Delta t$ は 1 よりも非常に小さいものとする。また、 k を正の整数とし、時刻 $t = 0$ から $t = k\Delta t$ の間に崩壊した原子核の数を A_k とする。

問 11 A_1 を、 N_0 、 λ 、 Δt を用いて表せ。

問 12 A_k を、 N_0 、 λ 、 Δt 、 A_{k-1} を用いて表せ。

問 13 A_k を、 N_0 、 λ 、 Δt 、 k を用いて表せ。

放射性同位体の原子核の数が最初の半分になる時間 $T_{\frac{1}{2}}$ [s] を半減期という。

問 14 $T_{\frac{1}{2}}$ を λ を用いて表せ。ただし、 $|x|$ が 1 より非常に小さい場合の近似式 $\log_e(1-x) \doteq -x$ を用いよ。

放射性同位体として ^{131}I のみを含む水溶液がある。この水溶液 1l あたりの放射能の強さは 100 Bq である。 ^{131}I の半減期は 8.0 日である。なお、毎秒 1 個の原子核が崩壊するような放射能の強さを 1 Bq という。

問 15 この水溶液 1l に含まれる ^{131}I のモル数を有効数字 2 桁で求めよ。必要であれば $\log_e 2 \doteq 0.69$ を用いよ。アボガドロ数を $6.0 \times 10^{23}/\text{mol}$ とする。