S

平成25年度

前期日程

専門理科問題

〔注　意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 問題冊子は，物理，化学の順序で一冊にまとめてある。

   問題は｛物理　1ページから11ページ／化学　12ページから21ページ｝にある。

   ページの脱落があれば直ちに申し出ること。
3. 解答用紙は，物理9枚，化学2枚が一緒に折り込まれている。受験する科目の解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
4. 物理学科を志望する者は，物理を解答すること。

   化学科を志望する者は，化学を解答すること。

   生物科学科生命理学コースを志望する者は，物理，化学の2科目のうちから1科目を選んで解答すること。
5. 受験番号は，受験する科目の解答用紙の受験番号欄に1枚ずつ正確に記入すること。
6. 解答は，解答用紙の指定されたところに記入すること。
7. 問題冊子の余白は，適宜下書きに使用してもよい。
8. 配付した解答用紙は持ち帰ってはいけない。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

物　理　問　題

（解答はすべて専門物理解答用紙に記入すること）

〔 1 〕 以下の問に答えよ。

I. 太陽，月，地球の半径をそれぞれ R_1，R_2，R_E とする。地球は太陽のまわりを周期 T_E で，月は地球のまわりを周期 T_2 で周回している（図 1 を参照）。簡単のため，それぞれ円軌道で周回するとする。地球と太陽の距離は L_1，月と地球の距離は L_2 で，L_1，L_2 は R_E に比べて十分大きい。太陽，月，地球の質量密度は一様とし，それぞれの質量密度を n_1，n_2，n_E とする。

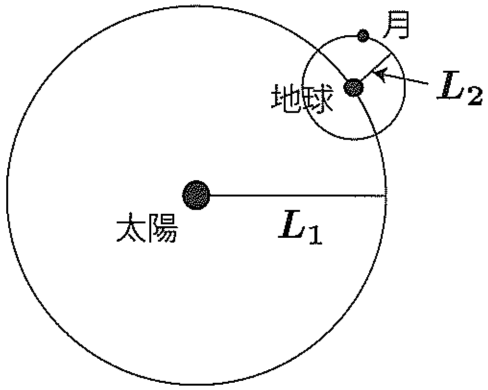

図 1

皆既日食では，太陽が月に隠れ，コロナのリングが観察される。ここでは，簡単のため太陽が月によって，ぴったり隠されるとする。

問 1　太陽と地球の質量密度の比 $\dfrac{n_1}{n_E}$ を T_E，T_2，R_1，R_2，R_E のうちの必要なものを用いて表せ。

地球は太陽のまわりを公転しており，その速さを v_E と記す。真空中の光の速さを c とする。

問 2　光が太陽から地球に伝播するのに 500 秒かかる。$\dfrac{v_E}{c}$ を有効数字 2 桁で求めよ。

II. マイケルソンとモーレーは 1887 年に，地球の公転運動を利用して光の速さが動いている観測者にどのように依存するかを調べた。驚くべきことに，彼らの実験から，真空中の光の速さは，動いている観測者の速度によらず，いつも同じ値 c であることがわかった。

この実験結果の意味を理解するために，次の思考実験をしてみよう。

観測者 A，B，C は静止して，x 軸上に等間隔で並んでいる。図 2 は，x 軸（空間座標）を横軸に，時間 t（時間座標）を縦軸にとったものである。これを x-t 図とよび，この座標系を K 座標系とよぶ。AB，BC の距離は ℓ で，x 軸は B を原点とし，C の方向を正の向きにとる。A，B，C が静止しているとき，A，B，C の x-t 図での $t>0$ の軌跡は図 2 の太線になる。時刻 $t=0$ に，B から A と C に向かって光を放出する。光は時刻 $t=t_0$ に A と C に同時に到達する。

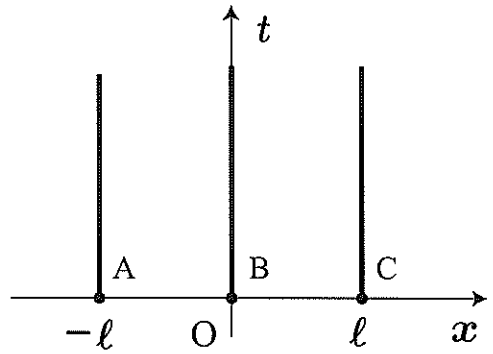

図 2

問 3　B から A と C に向けて放出された光の x-t 図での軌跡を，実線で解答用紙のグラフ 1 に描け。

次に，K 座標系で観測者 A，B，C が等速度（速さ $V<c$）で x 軸の正の向きに動いている場合を考える。$t=0$ で A，B，C はそれぞれ $x=-\ell$，0，ℓ に位置していた。

問 4　A，B，C の $t>0$ での軌跡を，点線で解答用紙のグラフ 1 に描け。

問3の場合と同様に，時刻 $t=0$ に，BからAとCに向かって光を放出する。K 座標系で，Bより放出された光は，$t=t_1$ にAに，$t=t_2$ にCに到達する。

問 5　t_1，t_2 を ℓ，c，V のうちの必要なものを用いて表せ。

観測者A，B，Cとともに動いている座標系を K' 座標系とよぶ。つまり，K' 座標系は K 座標系に対して，速さ V で x 軸の正の向きに動いており，K' 座標系では，A，B，Cは静止している。K' 座標系での時刻，つまりA，B，Cとともに動いている時計が刻む時刻を t' とする。この時刻 t' は，K 座標系での時刻 t とは異なるかもしれない。K' 座標系の x' 軸（空間座標）は，BからCの向きを正の向きにとる。K 座標系の原点 $(x,t)=(0,0)$ は K' 座標系の原点 $(x',t')=(0,0)$ に対応している。

マイケルソンとモーレーの実験の結果を我々の思考実験に適用すると，K' 座標系でも光は速さ c で伝播し，BからAとCに向かって放出された光は，同時にAとCに到達することになる。

グラフ1の x-t 図で，Bから放出された光がAとCに到達する点をそれぞれ A_1，C_1 としよう。K' 座標系の座標軸（x' 軸，t' 軸）を K 座標系の x-t 図に描くとどうなるだろうか。A_1，C_1 の座標は，K 座標系では (x_1,t_1)，(x_2,t_2)，K' 座標系では (x'_1,t'_1)，(x'_2,t'_2) となる。

K' 座標系でBは静止している。つまり，任意の時刻 t' に対して，Bの x' 座標は $x'=0$ である。このことは，問4で描いたBの軌跡が K' 座標系での t' 軸になっていることを意味する。光は $t'=t'_1=t'_2$ に同時にAとCに到達したのだから，A_1 と C_1 を通る線は K' 座標系における同時刻の線 $t'=t'_1=t'_2$ に対応していることになる。よって，x-t 図で原点を通り，A_1C_1 に平行な線が K' 座標系での x' 軸になっている。

したがって，K 座標系の座標 (x,t) と K' 座標系の座標 (x',t') は

$$x'=ax+bt \ , \ t'=pt+qx \qquad (1)$$

の関係で結ばれていることになる。ここで，係数 a，b，p，q は c，V で表される定数である。K' 座標系の x' 軸は関係式 (1) で $t'=0$ に対応し，t' 軸は $x'=0$ に対応している。以下の手順で係数 a，b，p，q を決めよう。

問 6　Bの軌跡を K 座標系と K' 座標系で記述することで，b を a，c，V のうちの必要なものを用いて表せ。

問 7　K' 座標系で光がAとCに同時に到達すること，あるいは，x-t 図で線分 A_1C_1 と x' 軸が平行であることを使い，q を p，c，V のうちの必要なものを用いて表せ。

問 8　C_1 を K 座標系と K' 座標系で記述することで，p を a，c，V のうちの必要なものを用いて表せ。

問 9　これで，b，p，q を a，c，V で表すことができた。それでは，a をどのようにして決めたらいいだろうか。K' 座標系は K 座標系に対して x 軸の正の向きに速さ V で動いているが，逆に K 座標系は K' 座標系に対して x' 軸の負の向きに速さ V で動いている。このことをヒントに a をどのように決めるか説明し，a を c，V で表せ。

このように，動いている K' 座標系の時刻 t' は，静止している K 座標系の時刻 t と異なることがわかった。両者は式 (1) の関係で結ばれており，時間と空間が混ざることになる。

〔 2 〕 図1に示すように，平行な2本の直線状の導体からなるレールが x-y 面上に置かれており，レールの片方の端は抵抗値 R の抵抗で接続されている。x-y 面上でレールの延びる方向を x 軸の正の向きにとり，それと直交する方向を y 軸にとる。また，x-y 面に垂直な方向を z 軸にとる。x-y 面全体には磁束密度 B（$B>0$）の一様な磁場（磁界）が z 軸の正の向き（紙面から手前に向かう向き）にかかっている。2本のレールのうち1本には，起電力 E（$E>0$）の直流電源とスイッチ S が組み込まれている。レールの間隔を ℓ とし，レールは無限に長い。このレールの上に，質量 m のまっすぐな導体棒がレールと直交するように置かれている。レールと導体棒は常に接触しており，導体棒はレールとの直交性を保ったまま摩擦なしにレール上を動くことができる。レールと導体棒の電気抵抗，および電源の内部抵抗は無視する。

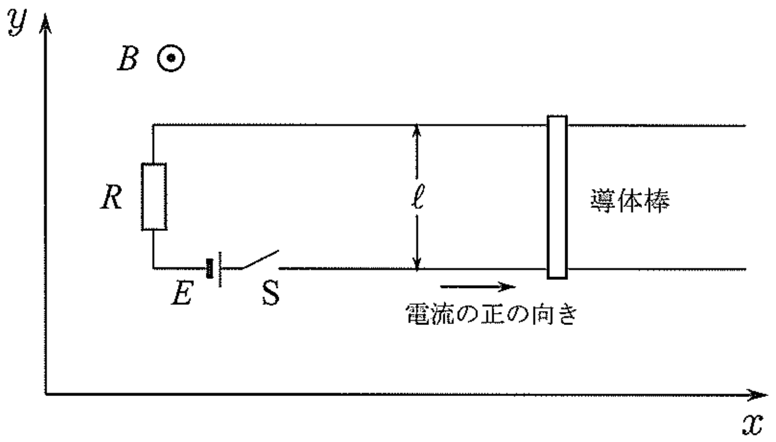

図1

スイッチ S を閉じると電流が流れるが，この電流が作る磁場は無視する。また，図の矢印の向きを電流の正の向きとする。

I. はじめ，スイッチ S は開いており，導体棒は静止している。

問 1 時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じた直後に導体棒を流れる電流 I_0 を求めよ。また，このときに導体棒に働く力の大きさ F_0 を求めよ。

問 2 スイッチ S を閉じると，静止していた導体棒は動き出す。導体棒の速度が v のとき，回路に生じる誘導起電力 $\phi(v)$ を，符号を含めて求めよ。また，このとき導体棒を流れる電流 $I(v)$ を，符号を含めて求めよ。

問 3 十分に時間が経った後の導体棒の速度 v_∞ を求めよ。

II. 図1の回路に流れる電流 I の時間変化は，図2のような，起電力 E（$E>0$）の直流電源，抵抗値 R の抵抗，静電容量 C のコンデンサーからなる回路に流れる電流の時間変化と同じになる。このことを示すために，次の (i) から (v) の順序で考えよう。

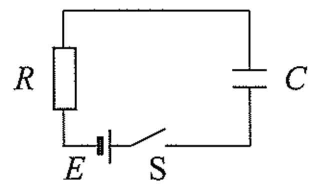

図2

(i) 図1のスイッチ S を閉じた後のある時刻 t で，導体棒の速度が v，電流が I であった。時刻 t から微小時間間隔 Δt の間における速度の変化を Δv とすると，速度の時間変化率 $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ は I に比例し，比例定数を k_1 として

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=k_1 I \tag{1}$$

の関係式が成り立つ。

問 4 k_1 の値を，B，ℓ，m のうちの必要なものを用いて表せ。

(ii) 問2の結果から I は v を用いて表される。その表式を (1) 式の右辺に代入すると，2つの定数 f_1 および γ_1 を用いた式

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=f_1-\gamma_1 v \tag{2}$$

が得られる。

問 5 f_1 および γ_1 を R，E，B，ℓ，m のうちの必要なものを用いて表せ。

(iii) 図２でスイッチ S を閉じた後のある時刻 t で，回路に電流 I が流れ，コンデンサーに電荷 Q が蓄えられている。時刻 t から微小時間間隔 Δt の間における電荷量の変化を ΔQ とすると，Q の時間変化率 $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ は I に等しく

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I \qquad (3)$$

が成り立つ。さらに，キルヒホッフの第２法則を用いると I は Q で表されるので，２つの定数 f_2 および γ_2 を用いた式

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = f_2 - \gamma_2 Q \qquad (4)$$

が成り立つ。

問 6　f_2 および γ_2 を R, E, C のうちの必要なものを用いて表せ。

(iv) (2) 式と (4) 式は類似している。Q と v が比例する場合，つまり，k を比例定数として

$$Q = kv \qquad (5)$$

が成立し，図１と図２の２つの回路が等価になる場合がある。この場合，$Q = kv$ と $\Delta Q = k\Delta v$ を (4) 式に代入して得られる式

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f_2}{k} - \gamma_2 v \qquad (6)$$

が (2) 式と同一となる必要があり，そのためには k および C が特定の値をとる必要がある。

問 7　(2) 式と (6) 式が同一となるように，k および C を R, E, B, ℓ, m のうちの必要なものを用いて表せ。

(v) 以上の議論により，問７で求めた C を用いると，(5) 式の比例関係が，スイッチ S を閉じた後で常に成り立ち，さらに，(1) 式と (3) 式から，図１の回路と図２の回路に流れる電流の時間変化が同じになる。言い換えると，電流の時間変化を考える上では，導体棒はコンデンサーと同じ役割を果たしていることになる。

問 8　図１の回路で，スイッチ S を閉じて十分に時間が経った後，それまでに抵抗 R で消費されたエネルギーを E, B, ℓ, m のうちの必要なものを用いて表せ。

Ⅲ. 図１のスイッチ S を開き，導体棒を静止させる。次に，レールの端に静電容量 C_1 のコンデンサーと抵抗値 R の抵抗を，図３のように接続する。

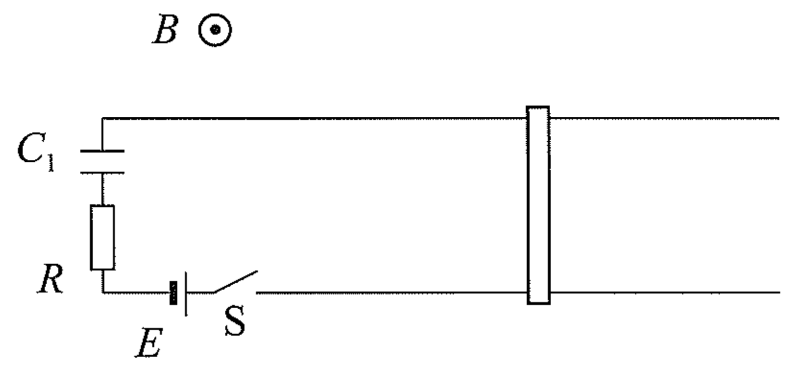

図３

上のⅡでの議論をふまえ，以下の２つの場合について考えよう。いずれの場合も，スイッチ S を閉じる前にはコンデンサー C_1 に電荷は蓄えられていないものとする。

問 9　導体棒が静止した状態でスイッチ S を閉じた場合。

十分に時間が経った後，コンデンサー C_1 に蓄えられた電荷 Q_1 を求めよ。また，このときの導体棒の速度 v_1 を求めよ。

問 10　導体棒に一定速度 v_0 ($v_0 > 0$) を与えた後，スイッチ S を閉じた場合。

十分に時間が経った後，コンデンサー C_1 に蓄えられた電荷 Q_2 を求めよ。また，このときの導体棒の速度 v_2 を求めよ。

〔 3 〕 以下の問に答えよ。また，空欄 $\boxed{(1)-(4)}$ には適切な式を，(ア)～(エ) には選択した数字を解答欄に記入せよ。ただし，光速度 c〔m/s〕，プランク定数 h〔J·s〕，クーロン力の比例定数 k_0〔N·m^2/C^2〕，円周率 π を用いてよい。

I. 20 世紀初頭の物理学の発展は，二つの基本定数によって特徴づけられる。一つは光速度 c，もう一つはプランク定数 h である。光は電磁波という波である。 波は，波長 λ と振動数 ν，振幅 A で特徴づけられ，c, λ, ν の間には $\lambda = \boxed{(1)}$ の関係が成り立つ。波である光の強度は A^2 に比例する。

この光が，粒子としても振る舞うことがさまざまな実験で明らかになった。その一つが光電効果とよばれる現象で，よく磨いた金属の表面に光を照射すると，以下に述べるような現象 A，B，C の特徴をもつ電子が金属から飛び出してくる。この電子は光電子とよばれる。

【現象 A】

照射する光の振動数がある値 ν_0 より（ア）{① 大きい，② 小さい} と，いくら光の強度を強くしても光電子は飛び出してこない。一方，照射する光の振動数が ν_0 より（イ）{① 大きい，② 小さい} と，いくら光の強度が弱くても光電子が飛び出してくる。この ν_0 の値は金属の種類によって決まる固有の値である。

【現象 B】

飛び出した光電子 1 個あたりの最大の運動エネルギー K_0 は，照射する光の振動数 ν に依存する。

【現象 C】

照射する光の振動数を固定し，光の強度を強くした場合，出てくる光電子の数は（ウ）{① 強度に比例する，② 強度に依存しない，③ 強度に反比例する，④ 強度の 2 乗に比例する}。また，飛び出した光電子の最大の運動エネルギー K_0 は（エ）{① 強度に比例する，② 強度に依存しない，③ 強度に反比例する，④ 強度の 2 乗に比例する}。

問 1 K_0 と ν の関係の概形を解答用紙のグラフ用紙に描け。

これらの現象は，光が粒子（光子）であると仮定すれば，説明できることをアインシュタインは見いだした。この仮定は，光量子仮説とよばれる。

問 2 光量子仮説では，現象 A，B，C をどのように説明したか，それぞれの現象について詳しく述べよ。

II. 19 世紀末から 20 世紀初めにかけて原子から放出される光のスペクトルの研究が進んでいた。高温の気体から出てくる光の中に，いくつかの決まった波長の光でできている線スペクトルがある。特に，バルマーは水素原子から出てくる光の線スペクトルに，波長 λ が

$$\lambda = 3.65 \times 10^{-7} \times \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \text{〔m〕} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots) \qquad (1)$$

となる系列があることを発見した。これはバルマー系列とよばれている。この規則性の解明は，ボーアによる原子模型，そして量子力学の構築へと発展してゆく。

上で見たように，光は波であると同時に粒子としても振る舞う。波長 λ と振動数 ν の光の量子（光量子）は，運動量 $p = \boxed{(2)}$，エネルギー $E = \boxed{(3)}$ をもつ。同様に，ド・ブロイは，電子も粒子であると同時に，波として振る舞うと予想した。それによれば，運動量 p の電子は，ド・ブロイ波長とよばれる固有の波長 $\lambda_d = \boxed{(4)}$ をもつ。

水素原子は陽子と電子で構成され，陽子は電子に比べて十分に重い。簡単のため，陽子は固定され，電子は陽子を中心とした半径 r〔m〕の円軌道を v〔m/s〕の速さで回っているとする。陽子の電気量を $+e$〔C〕，電子の質量を m〔kg〕，電気量を $-e$〔C〕とする。

それまでの電磁気学によれば，陽子のまわりを円運動する電子は，電磁波を放出する。その結果，電子は陽子に向かって落ち込んでいき，一定半径の

円軌道を保てなくなる。ボーアは，電子軌道がある条件を満たせば，電子は定常状態となり一定半径の円軌道を保てると仮定した。これを，ボーアの量子条件とよぶ。

問 3　ボーアの量子条件がどのようなものか，説明せよ。

問 4　電子と陽子の間には電気的な引力が働いており，それにより，電子が円運動すると考える。ボーアの量子条件を用いて，電子の円運動の半径 r のとりうる値を求めよ。また，このときの電子の全エネルギーを求めよ。

問 5　基底状態の水素原子を電離してイオンにするために必要な最小のエネルギーを求めよ。

問 6　ボーアは，もう一つの仮定をして，バルマー系列を説明した。それは，どのような仮定か説明せよ。

問 7　これまでの結果を用いて，バルマー系列の波長 λ を表す式 (1) を導出せよ。また，式 (1) に現れる係数 3.65×10^{-7}〔m〕を，m，e，h，k_0，c のうちの必要なものを用いて表せ。