Quadric model とその解析

大阪大学大学院理学研究科物理学専攻東島研究室

都築　誠

東島清氏、新田宗土氏、木村哲士氏との共同研究

Prog. Theor. Phys. **105** (2001) vol.2 261, hep-th/0010272

§0. 何よりも前に

1 . 低エネルギー有効ラグランジアン

低エネルギーの有効ラグランジアンは
対称性GとHのみにより決まる。
(Callann,Coleman,Wess,Zumino)

↓

**ターゲット空間がわかり、
補助場による線形化が可能**

2.large-n 展開

有効作用がnのオーダーであるとき
量子補正が小さいところしか物理に効かない。
つまり

$$S_{\text{eff}} \sim n\tilde{S}$$

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi_0 \exp i(n\tilde{S})$$

$\tilde{S}$ の最小のあたりしかZに効いてこない。
よって$\tilde{S}$をΦ_0の揺らぎの小さいところで展開。

§1. イントロダクション

4D $\mathcal{N}=1$ (2D $\mathcal{N}=2$) SUSY NLσM

今までCP^{n-1},Grassmann 模型以外

補助場による線形化の方法がなかった。

⇑

target 空間 = Kähler の困難

ゲージ場を入れることにより

これをエルミート対称空間に拡大

(東島氏、新田氏の研究)

今回その中の１つ

Quadric モデルについて

large-nの方法で解析

$$Q^{n-2}(\boldsymbol{C}) = \frac{SO(n)}{SO(n-2)\times U(1)}$$

§2. Q^n モデル Lagrangian

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta \{ \Phi_i^\dagger \Phi_i e^{2V} - \frac{2n}{g^2} V \} + \left(\int d^2\theta \, \Phi_0 \Phi_i^2 + \text{ h.c. } \right)$$

力学場 Φ_i	$A_i(x)$, $\psi_i(x)$, $F_i(x)$
補助場 Φ_0	$A_0(x)$, $\psi_0(x)$, $F_0(x)$
V	$v_\mu(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $\lambda(x)$, $D(x)$

生成汎関数

$$Z = \int \mathcal{D}\Phi_i \mathcal{D}\Phi_0 \mathcal{D}V \exp iS$$

$$\Downarrow$$

有効作用、有効ポテンシャルがもとまる。

$$S_{\text{eff}}, V_{\text{eff}} \sim n$$

有効ポテンシャル $\Rightarrow$ 真空が求まる。

§3. 2つの真空

真空が安定であるという条件(ギャップ方程式)

$$\frac{\delta V_{\rm eff}}{\delta(\text{補助場})} \;=\; 0\;.$$

真空期待値

$$\langle A_i(x)\rangle = \varphi_i$$
$$\langle M(x)\rangle = M\;,\quad \langle N(x)\rangle = 0\;,\quad \langle D(x)\rangle = D\;,$$
$$\langle F_0(x)\rangle = F_0\;,\quad \langle A_0(x)\rangle = A_0$$
$$\langle\,\text{その他}\,\rangle \;=\; 0\;.$$

これより2つの真空が現れる！

1. $M = m$ (Schwinger phase)

2. $|A_0| = m$ (Higgs phase)

両方とも

$$\varphi_i = 0 \quad,\; F_0 = D = 0.$$

$SO(n)$対称性の回復。SUSYは保っている。

さらに漸近的自由性

$$\beta(g_R) = \frac{\partial}{\partial \log \mu} g_R = -\frac{g_R^3}{4\pi} < 0$$

§4. Schwinger Phase

$M = m \Leftarrow$ カイラル対称性の破れ

large-n 展開により 2 点関数を計算

$\Downarrow$

$M \to m + M$ とすることにより

$$
\begin{aligned}
nS_{\text{eff}} = \frac{n}{4\pi m^2}\Bigg(&\frac{1}{2}\partial^\mu N \partial_\mu N + v^\mu 2m\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu N - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&+ \frac{1}{2}\big(\partial^\mu M \partial_\mu M - 4m^2 M^2\big) + \frac{1}{2}\bar{\lambda}(i\partial\!\!\!/ - 2m)\lambda\big) \\
&+ \partial^\mu A_0^* \partial_\mu A_0 - 4m^2 A_0^* A_0 + \bar{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - 2m)\psi_0\Bigg) \\
&+ (D_\mu A_i)^\dagger (D^\mu A_i) - m^2|A_i|^2 + \bar{\psi}_i(iD\!\!\!/ - m)\psi_i + \cdots
\end{aligned}
$$

力学場が質量 m をもち、

補助場が質量 $2m$ の運動項を持つ。

力学場の fermion $\Rightarrow$ Dirac 質量

とくにゲージ場と N は **Schwinger 機構**

によって質量獲得!(CP^{n-1} モデルと類似。)

§5. Higgs Phase ⇐ 新しいPhase!

$|A_0| = m$ ⇐ ゲージ化$U(1)$対称性の破れ

$A_0 = m + A_R + iA_I$ とすることにより

$$
\begin{aligned}
nS_{\text{eff}} = \frac{n}{4\pi m^2}\Bigg(&\frac{1}{2}(\partial_\mu M \partial^\mu M - 4m^2 M^2) \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\mu N \partial^\mu N - 4m^2 N^2) \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\lambda}'(i\partial\!\!\!/ - 2m)\lambda' + \bar{\psi}'(i\partial\!\!\!/ - 2m)\psi' \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\mu A_R \partial^\mu A_R - 4m^2 A_R^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu A_I \partial^\mu A_I + 2mv^\mu \partial_\mu A_I \\
&- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2m^2 v_\mu v^\mu\Bigg) + (D_\mu A_i)^\dagger (D^\mu A_i) - m^2 |A_i|^2 \\
&+ \bar{\psi}_i i\not{D}\psi_i - \frac{1}{2}m\psi_i\psi_i - \frac{1}{2}m\bar{\psi}_i\bar{\psi}_i + \cdots
\end{aligned}
$$

力学場が質量 m をもち、

補助場が質量 $2m$ の運動項を持つ。

力学場のfermion ⇒ Majorana 質量

ゲージ場は**Higgs 機構**によって質量獲得!

インスタントンの効果

$A_0 = m\exp(2i\sigma(x))$と言うphaseの自由度が残っている。

$\Downarrow$

$S^1 \to S^1$ のトポロジーの効果（インスタントン）

さらに$A_0 \sim \bar{\psi}_i\bar{\psi}_i \leftarrow$ 超伝導と類似

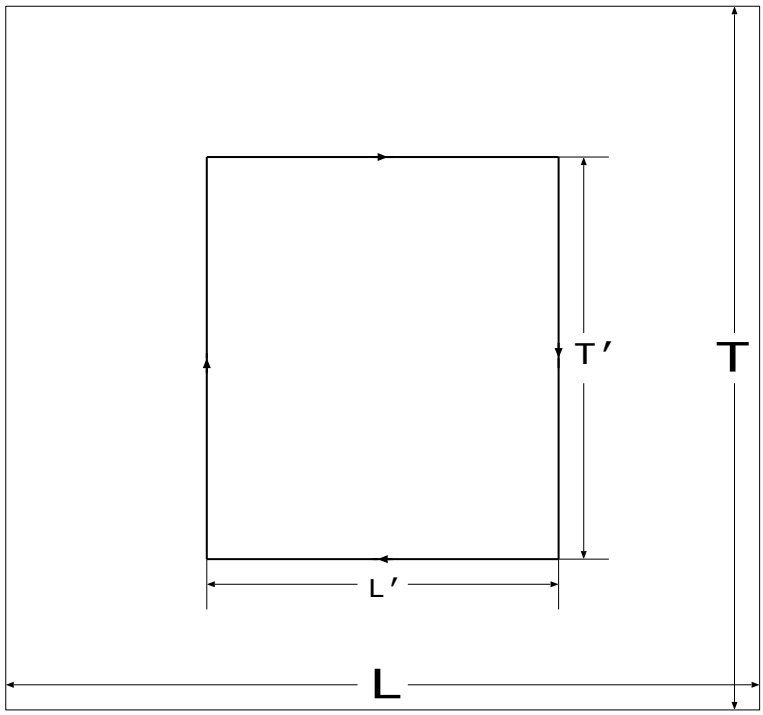
トポロジカルチャージは

$$\nu = \frac{1}{\pi}\int d^2x\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu v_\nu$$

$\Uparrow$

$\Phi = 2\pi\nu/2$に対応。

Wilson loop によりこの効果を検証



$$W = \exp\left(-\frac{q}{e} i \oint v_\mu dx^\mu\right)$$

$$\Downarrow$$

$$V(L') = -\frac{1}{T'} \log\langle\, W \,\rangle$$

これより、

$$V = \alpha L'(1 - \cos\frac{\pi q}{e})$$

電荷$q = \pm e$の電子が閉じ込められている!

どのくらいのスケールで

閉じ込めが起こっているか？

$\Downarrow$

$1/\alpha$ の評価

$\alpha \sim \mu^2 \exp(-n)$ のオーダー。

つまり

large - n ではとても小さい。

$\Rightarrow$ 起こってもほとんど分からない。

§6. まとめ

Q^n モデルを large-n の方法によって解析

$\Downarrow$

2つの真空が現れる

1. Schwinger Phase $\Leftarrow$ (CP^{n-1} と類似)

2. Higgs Phase $\Leftarrow$ (新しいPhase)

インスタントンの効果により閉じ込め。

しかしとても弱い。

2つとも

補助場は全て質量を獲得

漸近的自由

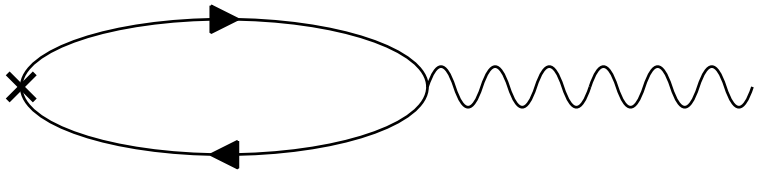
§7. これから

1. これらの2つの真空に何らかの双対性?

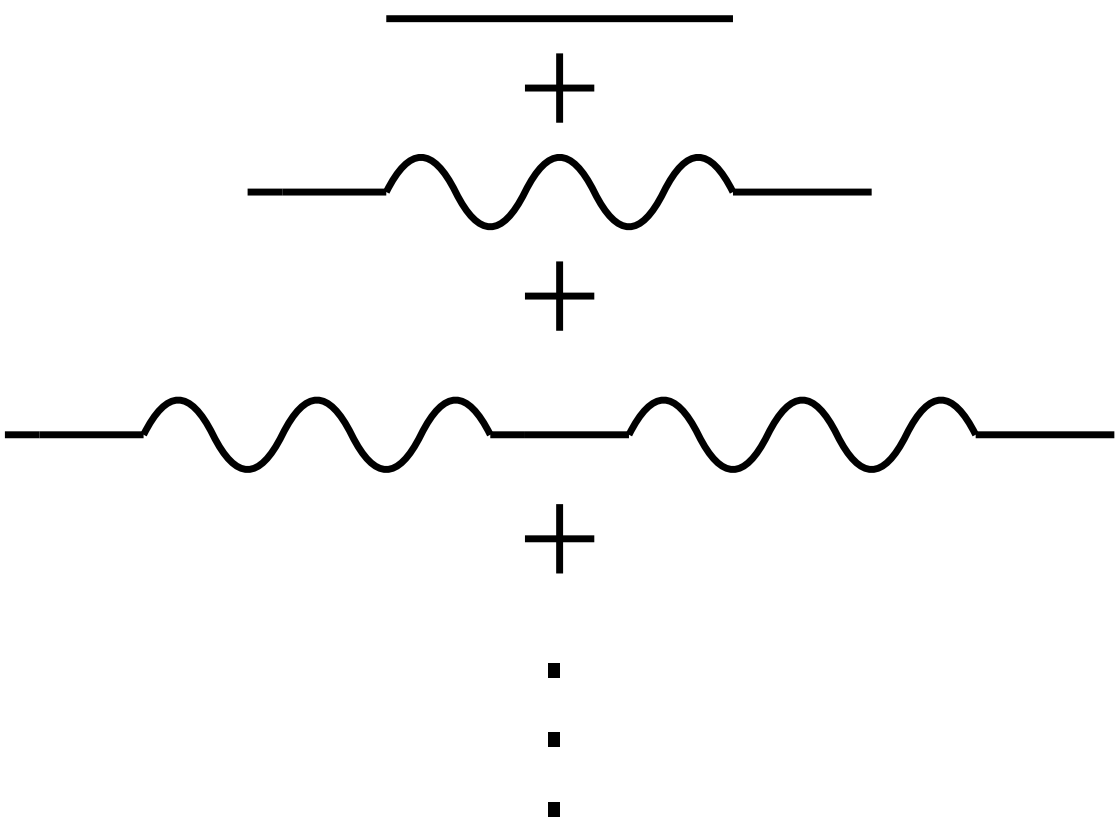
2. ほかのエルミート対称空間の解析。

成分場で表示

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \partial_\mu A_i^* \partial^\mu A_i + i\bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i - A_0^* A_0 A_i^* A_i \\
& - [i(A_i^* \partial_\mu A_i - A_i \partial_\mu A_i^*) + \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i] v^\mu \\
& + v^\mu v_\mu A_i^* A_i - M^2 A_i^* A_i - N^2 A_i^* A_i \\
& - M\bar{\psi}_i \psi_i - iN\bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_i \\
& + 4DA_i^* A_i - \frac{2n}{g^2} D - 4i \left(A_i \bar{\psi_i} \lambda - A_i^* \psi_i \lambda \right) \\
& + \frac{1}{2}(F_0 A_i A_i + F_0^* A_i^* A_i^*) - (\psi_0 \psi_i A_i + \bar{\psi}_0 \bar{\psi}_i A_i^*) \\
& - \frac{1}{2} A_0 \psi_i \psi_i - \frac{1}{2} A_0^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_i \; .
\end{aligned}
$$



Nv 混合項のファインマングラフ



Schwinger 機構

対称性	A_i	ψ_i	F_i	A_0	ψ_0	F_0	v_μ	$M - i\gamma_5 N$	λ	D	θ
ゲージ$U(1)$対称性	1	1	1	-2	-2	-2	0	0	0	0	0
カイラル対称性	0	1	0	0	1	0	0	-2	1	0	1

Table 1: $U(1)$対称性とカイラル対称性の電荷

Type	G/H	$\dim_{\mathbf{C}}(G/H)$
AIII_1	$\mathbf{C}P^{N-1} = SU(N)/SU(N-1)\times U(1)$	$N-1$
AIII_2	$G_{N,M}(\mathbf{C}) = U(N)/U(N-M)\times U(M)$	$M(N-M)$
BDI	$Q^{N-2}(\mathbf{C}) = SO(N)/SO(N-2)\times U(1)$	$N-2$
CI	$Sp(N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N+1)$
DIII	$SO(2N)/U(N)$	$\frac{1}{2}N(N-1)$
EIII	$E_6/SO(10)\times U(1)$	16
EVII	$E_7/E_6\times U(1)$	27

Table 2: エルミート対称空間