



Cascade of Gregory-Laflamme Transitions and $U(1)$ Breakdown in Super Yang-Mills

Tatsuma Nishioka
(Kyoto Univ.)

based on [arXiv:0706.0188](https://arxiv.org/abs/0706.0188)
with Masanori Hanada @ RIKEN

Contents

1. Introduction
2. Super Yang-Mills on T^n
3. Gregory-Laflamme Transition
4. GL Cascade of Black branes
5. GL Cascade of D-brane
6. Summary

1. Introduction

♠ AdS/CFT 対応

$AdS_5 \times S^5$ 時空上の
IIB 型 超重力理論

\Leftrightarrow

$\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$
超対称 Yang-Mills
理論の強結合領域

$AdS_5 : SO(2,4)$

4 次元共形対称性

$S^5 : SO(6) \simeq SU(4)$

\Leftrightarrow

大域的対称性

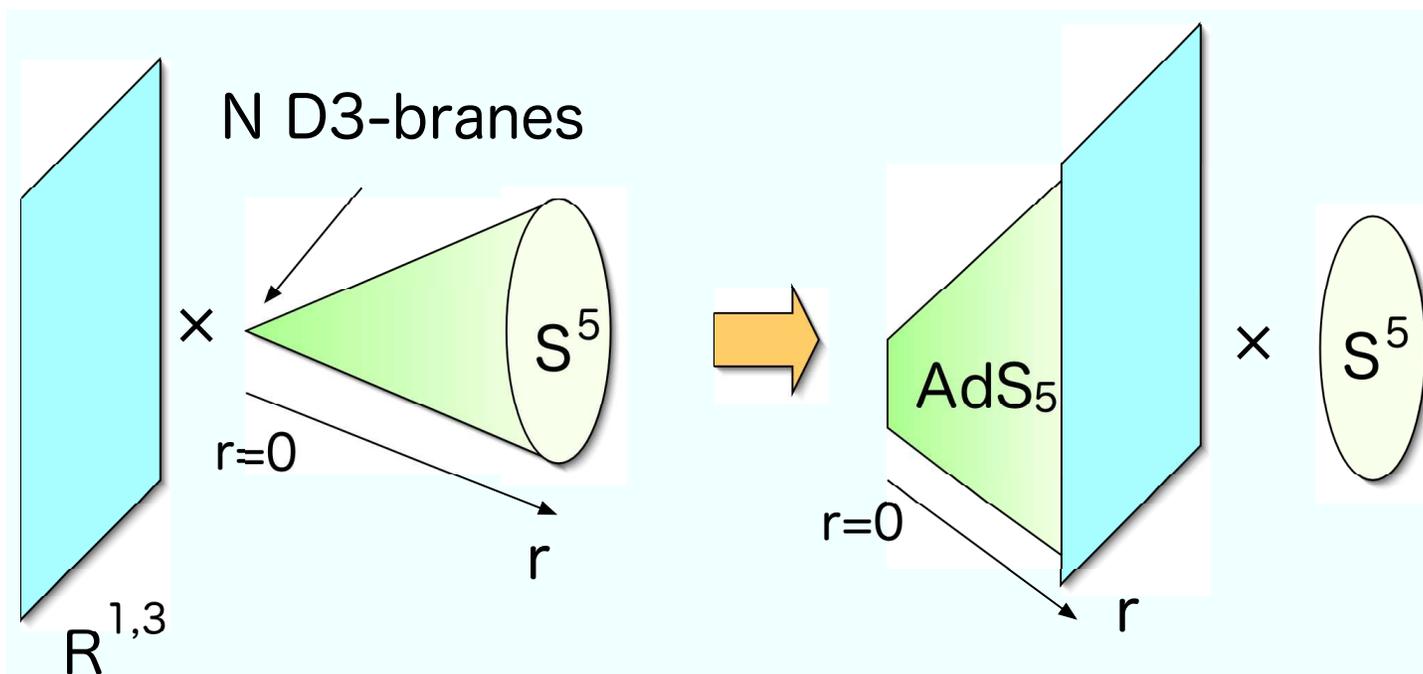
$\mathcal{N} = 4$ 超対称性
の持つ R-対称性

(J. Maldacena, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231-252)

10次元平坦時空中に D3-brane を置いたとき、D3-brane の近くを見ると

- $AdS_5 \times S^5$ 時空中の超重力理論
- 4次元のゲージ理論

の2通りの見方が出来る



AdS/CFT on Torus

D-brane をトーラスに巻き付けることで

- トーラス上の Super Yang-Mills (弱結合)
- トーラスコンパクト化した AdS 空間上の Supergravity (SYM の強結合領域に対応)

の間にも対応が成立する

Remark

T^n 上の SYM は global な対称性として $U(1)^n$ を持つ

2. Super Yang-Mills on T^{n+1}

トーラス T^n 上の Euclid 化した $U(N)$ SYM の action は次のように表せる ($\lambda \equiv g_{YM}^2 N$)

$$S_{YM} = \frac{N}{4\lambda} \int_0^{1/T_H} dt \int_0^{L_1} dx^1 \cdots \int_0^{L_n} dx^n \text{Tr} \{ F_{\mu\nu}^2 + 2(D_\mu \phi^I)^2 - [\phi^I, \phi^J]^2 + (\text{fermion}) \}$$

この action は global $U(1)^{n+1}$ 対称性を持つ
 $A_\mu \rightarrow A_\mu + c_\mu \cdot 1_N$

♣ Order parameter として (spatial) Wilson loop を導入する

$$W_\mu = \frac{1}{N} \text{Tr} e^{i \int_0^{L_\mu} dx^\mu A_\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n)$$

(ここで μ の足については縮約していないことに注意)

高温極限 $T_H \rightarrow \infty$ を取れば、SYM は bosonic YM on T^n になる (fermion は KK mass を持ち decouple する)

bosonic YM では Wilson loop は

- トーラスの周期 (L_μ) が大きい時は、 $U(1)$ 対称性があるため期待値を持たない ($L_\mu : \text{大} \Rightarrow \langle W_\mu \rangle = 0$)
- トーラスの周期 (L_μ) が小さくなると、 $U(1)$ 対称性が破れて期待値を持つ ($L_\mu : \text{小} \Rightarrow \langle W_\mu \rangle \neq 0$)
- トーラスの各周期が同じ場合 ($L_\mu = L$) でも L を小さくしていくと $U(1)$ 対称性は一つずつ破れて行く

ことが知られている (Narayanan-Neuberger-Reynoso, arXiv:0704.2591 [hep-lat])

Motivation

$n = 1$ のとき (SYM on S^1)、 $U(1)$ 対称性の破れは重力側で見ると Gregory-Laflamme transition と関係することが知られている (Aharony-Marsano-Minwalla-Wiseman; hep-th/0406210)

そこで (重力側から) 次のように推測できる

♠ $L_1 \ll L_2 \ll \dots \ll L_n \Rightarrow U(1)$ 対称性は順次破れて行く

♣ $L_1 \sim L_2 \sim \dots \sim L_n \Rightarrow U(1)$ 対称性は同時に破れる

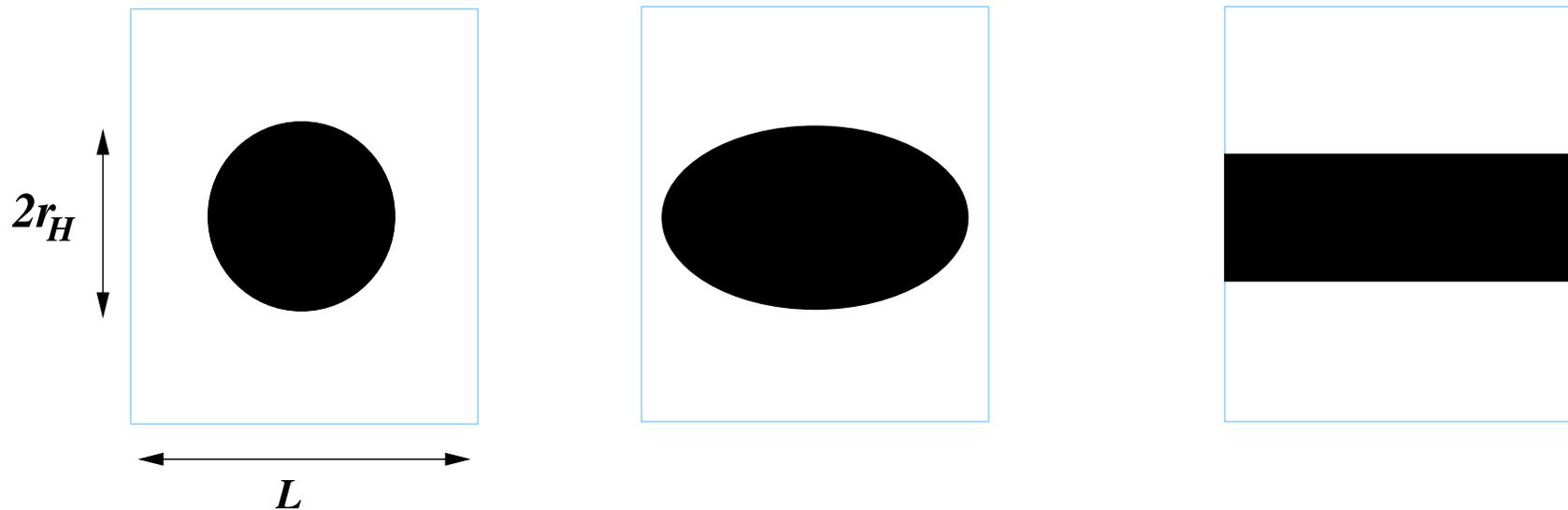
一方、YM 側からは

◇ $L_\mu = L \Rightarrow U(1)$ 対称性は一つずつ破れる

果たして重力側では ♣, ◇ のどちらの現象が起こるのだろうか？

3. Gregory-Laflamme Transition

S^1 に巻き付く black string 解は、その周期がホライズン半径より大きくなると不安定になる (Gregory-Laflamme, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 2837)



Remark

metric perturbation による解析から、black string 解がある長波長モードの揺らぎに対して不安定になることが分かる

Black String solution

D 次元 black string 解は $D - 1$ 次元 Schwarzschild black hole 解に S^1 をファイバーすることで得られる

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_H^{(n)}}{r} \right)^{D-4} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_H^{(n)}}{r} \right)^{D-4}} + r^2 d\Omega_{D-3}^2 + dy^2,$$

T^n をファイバーさせれば、より一般の black string 解 (black brane 解) が得られる

$$ds^2 = - \left(1 - \left(\frac{r_H^{(n)}}{r} \right)^{D-n-3} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r_H^{(n)}}{r} \right)^{D-n-3}} + r^2 d\Omega_{D-n-2}^2 + \sum_{i=1}^n dy_i^2,$$

Thermodynamical quantities

全ての周期が L のトーラス T^n に巻き付いた black string の熱力学量は以下のようなになる

- Hawking temperature: $T_H^{(n)} = \frac{D-n-3}{4\pi r_H^{(n)}}$

- Mass:

$$M(n) = \frac{1}{16\pi G_N^{(D)}} (D - n - 2) \Omega_{D-n-2} (r_H^{(n)})^{D-n-3} L^n$$

- Entropy: $S(n) = \frac{1}{4G_N^{(D)}} \Omega_{D-n-2} (r_H^{(n)})^{D-n-2} L^n$

- Free energy: $F(n) = M(n) - T_H^{(n)} S(n)$
 $= \frac{\Omega_{D-n-2}}{16\pi G_N^D} (r_H^{(n)})^{D-n-3} L^n$

Thermodynamical Instability

トーラスに巻き付いた black brane 解は周期 L を大きくすると、同じ温度の Schwarzschild black hole に対して熱力学的に不安定になる

つまり black brane と black hole の free energy の大小がある周期 L_c を境に入れ替わる

$$F(0) = F(n), \quad \text{when } L = L_c$$

Remark

熱力学的不安定性は必ずしも重力解としての不安定性を意味しない (二相共存状態になっており古典的には安定である)

Black string (brane) の巻き付くトーラスの周期を変えたとき、
♣, ◇ のどちらの現象が起こるか調べよう

それぞれに対応する重力側での transition は次のようになる

♣ の場合: BB on $T^n \Rightarrow$ BH

◇ の場合: BB on $T^n \Rightarrow$ BB on $T^{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow$ BH

今回は free energy を比較する (YM 側との対応を見易くするため)

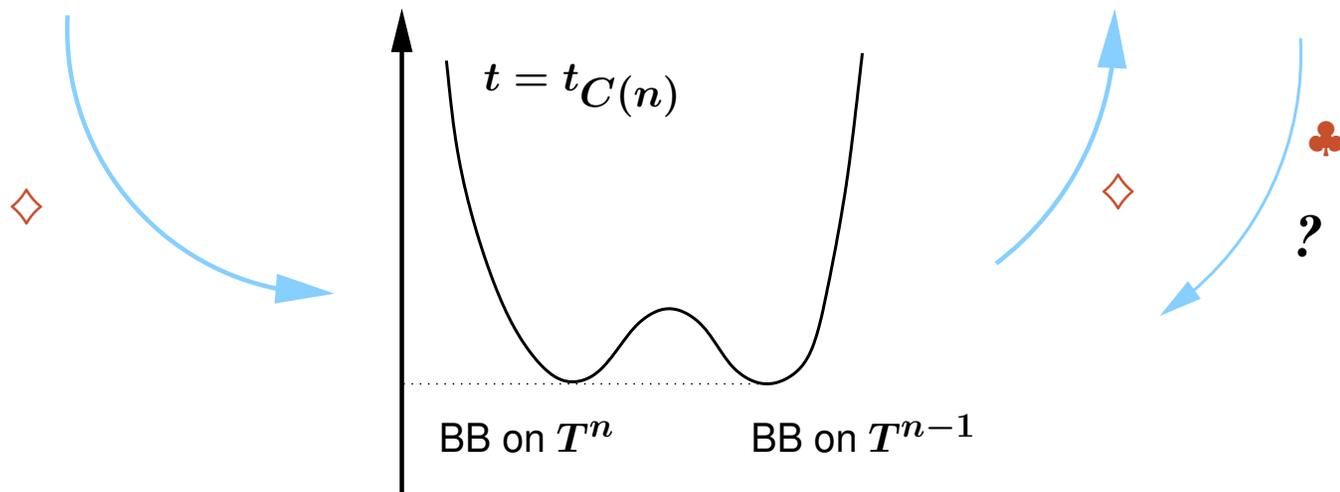
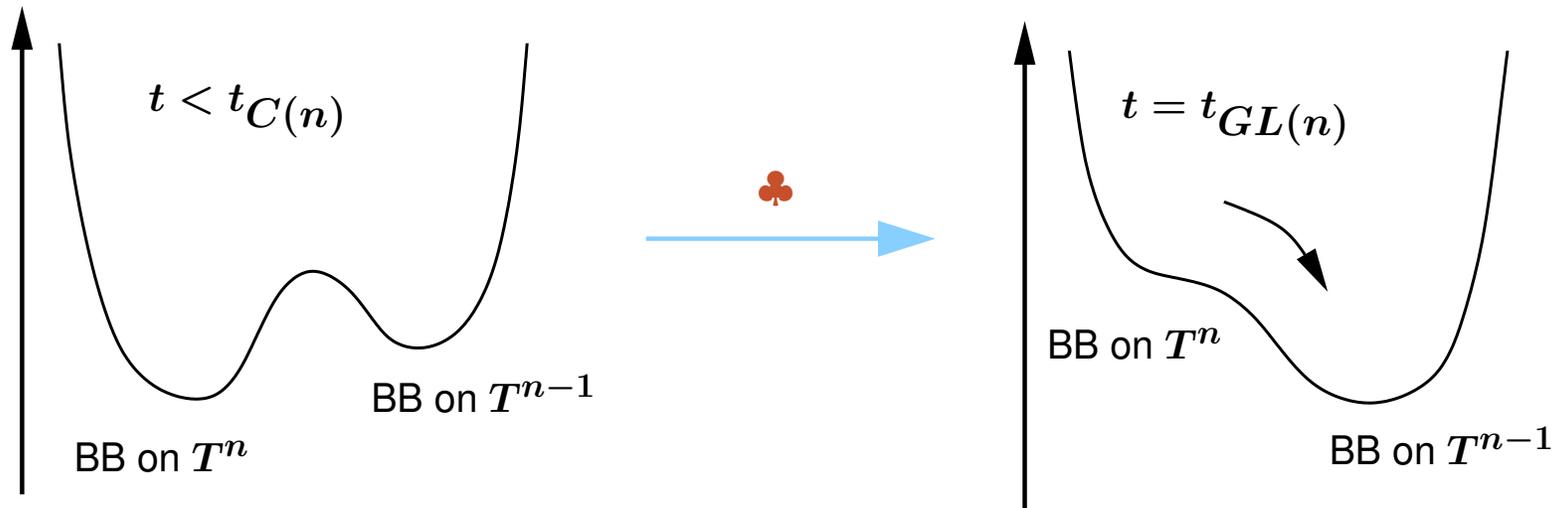
- Neutral black brane (準備)
- D-brane (本番)

4. GL Cascade of Black Branes

以下、無次元化した有効温度 ($t_H \equiv T_H \cdot L$) を用いる

- $t_{C(n)}$: black n -brane on T^n と black $(n - 1)$ -brane on T^n の free energy が等しくなる (有効) 温度
- $t_{GL(n)}$: black n -brane に GL モード (不安定モード) が出る 温度

温度を上げていったとき、どちらの不安定性 (熱力学的と重力的) が先に現れるかによって ♣ と ◇ を判定できる



Cascade of GL Transition

Black brane on $\mathbb{R}^7 \times T^3$ に対する 臨界温度 (左) と GL 温度 (右)

$t_{C(1)}$	1.28
$t_{C(2)}$	1.17
$t_{C(3)}$	1.04

$t_{GL(1)}$	1.30
$t_{GL(2)}$	1.20
$t_{GL(3)}$	1.08

この結果から

$$t_{C(n)} < t_{GL(n)} < t_{C(n-1)}$$

温度を上げていく (L を大きくする) と **3** \rightarrow **2** \rightarrow **1** \rightarrow **BH** の
順で相転移が起る



◇ が起こることが分かる (Cascade of GL)

5. GL Cascade of D-branes

T^p 上の SYM に対応する T^p に巻き付いた D p -brane を考える

D p -brane on T^p

$$ds^2 = \alpha' \left\{ \frac{U^{\frac{7-p}{2}}}{g_{YM} \sqrt{d_p N}} \left[- \left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right) dt^2 + \sum_{i=1}^p dy_i^2 \right] + \frac{g_{YM} \sqrt{d_p N}}{U^{\frac{7-p}{2}} \left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right)} dU^2 + g_{YM} \sqrt{d_p N} U^{\frac{p-3}{2}} d\Omega_{8-p}^2 \right\},$$

$$e^\phi = (2\pi)^{2-p} g_{YM}^2 \left(\frac{g_{YM}^2 d_p N}{U^{7-p}} \right)^{\frac{3-p}{4}}, \quad d_p = 2^{7-2p} \pi^{\frac{9-3p}{2}} \Gamma \left(\frac{7-p}{2} \right)$$

ここで $0 \leq y_i \leq L$ としている

T-dual picture

Dp -brane のトーラスに巻き付く方向全てに T-dual をとる
 $\Rightarrow T^p$ 上に一様分布した D0-brane

D0-brane on T^p

$$ds^2 = \alpha' \left\{ - \frac{U^{\frac{7-p}{2}}}{\sqrt{d_p \lambda}} \left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right) dt^2 + \sqrt{d_p \lambda} U^{\frac{p-3}{2}} d\Omega_{8-p}^2 \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{d_p \lambda}}{U^{\frac{7-p}{2}}} \left[\frac{dU^2}{\left(1 - \frac{U_0^{7-p}}{U^{7-p}} \right)} + \sum_{i=1}^p d\tilde{y}_i^2 \right] \right\},$$

$$e^\phi = (2\pi)^2 \frac{\lambda}{N} \left(\frac{d_p \lambda}{U^{7-p}} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{L^p}, \quad \lambda \equiv g_{YM}^2 N$$

ここで $0 \leq \tilde{y}_i \leq (2\pi)^2 / L$ である

Description as SUGRA

SUGRA の記述が良い範囲は T-dual をとる前後で異なる

$$\begin{aligned} Dp\text{-brane: } \quad & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} \ll t_H \ll \lambda'^{\frac{1}{3-p}} \quad (p = 0, 1, 2) \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} \ll t_H, \quad 1 \ll \lambda' \quad (p = 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D0\text{-brane: } \quad & t_H \ll 1 \quad (\lambda' \equiv \lambda L^{3-p}) \\ & t_H \ll \lambda'^{1/(3-p)} \quad (p = 0, 1, 2), \quad 1 \ll \lambda' \quad (p = 3) \end{aligned}$$

GL transition が起る温度領域に応じて、そこでの良い描像をとる

Comparison of Free Energy

Dp -brane on T^p と $D(p-1)$ -brane on T^{p-1} の free energy を比較する

$$F(p) = -\frac{(5-p)B(p)}{L} N^2 \lambda_{(p)}^{\frac{p-3}{5-p}} t_{(p)}^{\frac{2(7-p)}{5-p}},$$

$$t_{(p)} = \frac{(7-p)u_0^2}{4\pi\sqrt{d_p}\lambda'}, \quad B(p) \equiv \frac{1}{2^{11-2p}\pi^{\frac{13-3p}{2}}\Gamma(\frac{9-p}{2})} \left(\frac{4\pi\sqrt{d_p}}{7-p}\right)^{\frac{2(7-p)}{5-p}}$$

Remark

't Hooft coupling $\lambda_{(p)}$ は p に依らない

$D(p-1)$ が Dp より安定になる ($F(p) > F(p-1)$) のは

$$t < t_{C(p)} \equiv \frac{A(p)}{\sqrt{\lambda'}}, \quad A(p) = \left(\frac{(6-p)B(p-1)}{(5-p)B(p)}\right)^{\frac{(5-p)(6-p)}{4}}$$

D3-brane on $\mathbb{R}^7 \times T^3$ に対する臨界温度（左）と GL 温度（右）

$t_{C(3)}$	$2.87/\sqrt{\lambda'}$
$t_{C(2)}$	$2.67/\sqrt{\lambda'}$
$t_{C(1)}$	$2.40/\sqrt{\lambda'}$

$t_{GL(3)}$?
$t_{GL(2)}$?
$t_{GL(1)}$	$2.29/\sqrt{\lambda'}$

温度を下げる（ L を小さくする）につれて

$D3 \rightarrow D2 \rightarrow D1 \rightarrow D0$ と GL transition が起こる

これは YM 側の振る舞いと一致する

GL and T-dual

同じ周期を持つトーラスの周期を同時に変えていったとき

- **Black brane:** 周期 L を大きくする
- **D-brane:** 周期 L 小さくする

につれて段階的に GL transition が起こることを見た

一見、異なることが起きているように見える

しかし、D-brane の場合

Transition は T-dual をとった側 (D0 picture) で起こっている
そのため、D0-brane 側で見ると周期 L が**大きくなる**につれて transition が起こる

6. Summary

- 同じ周期を持つ高次元トーラスに巻き付いた black brane 解は、全ての周期を同時に大きくしたとしてもある一つの方向から GL transition を起し、一つ低い次元のトーラスに巻き付いた black brane 解になる
- この相転移は一次相転移である
- D-brane の場合は周期が小さくなるにつれて段階的に GL transition を起す
- これは T-dual をとった D0 picture で見れば black brane の場合と同じである
- これは dual な SYM で見られた $U(1)$ 対称性の破れ方と同じである