自発的部分的に破れた $\mathcal{N}$=2 超対称性による Dijkgraaf-Vafa 関係式の変形

丸吉一暢　大阪市立大学

based on arXiv:0704.1060 [hep-th] (to appear in Phys. Lett. B)

by Hiroshi Itoyama and K.M.

2007/6/16 関西地域セミナー@ 阪大

Contents

1. Introduction

2. 自発的に破れた $\mathcal{N}$=2 超対称性を持つ $\mathcal{N}$=2, U(N)ゲージ模型

3. Dijkgraaf-Vafa 関係式の変形

4. Conclusion

1. Introduction

Super Yang-Mills 理論 (SYM) は holomorphic な量をもっている。

$$\begin{cases} \mathcal{N}=1 \text{ SYM:} & \text{superpotential} \\ \mathcal{N}=2 \text{ SYM:} & \text{prepotential} \end{cases}$$

Holomorphy によって、これらの低エネルギーでの形も制限される。

（例えば、Seiberg と Witten による $\mathcal{N}$=2 SYM の厳密解など）

以下では、低エネルギー effective superpotential を考える。

Dijkgraaf-Vafa relation

[Dijkgraaf-Vafa '02]

$$W_{\text{eff}}(S) = N\frac{\partial}{\partial S}\underline{F_{\text{free}}(S)}$$

effective superpotential

planar free energy

$\mathcal{N}=1$, U(N) super Yang-Mills
+
$W_{\text{tree}}(\Phi)$

matrix model with the action: $-\frac{1}{g_s}W_{\text{matrix}}(M)$

$$\left(\begin{aligned} W_{\text{tree}}(\Phi) &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k}{k}\text{Tr}\Phi^k \\ W_{\text{matrix}}(M) &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{g_k}{k}\text{Tr}M^k \end{aligned}\right)$$

glueball superfield

$$S = -\frac{1}{64\pi^2}\text{Tr}_{\text{U(N)}}\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha$$

$\mathcal{N}=1$, U(N) SYM + $W_{\mathrm{tree}}(\Phi)$

is considered as $\boxed{\mathcal{N}=2\text{, U(N) SYM + } W_{\mathrm{tree}}(\Phi)}$

matter content は同じ

$\mathcal{N}=2$の情報

- $\mathcal{N}=2$ Seiberg-Witten curve
  [Cachazo-Intriligator-Vafa, Cachazo-Vafa]
- fermionic shift symmetry
  [Cachazo-Douglas-Seiberg-Witten]
- etc.

この superpotential は explicitly (もしくは softly)に超対称性を$\mathcal{N}$=1に破る。

- 超対称性の破れが自発的であった場合には何が起こるか?
- Dijkgraaf-Vafa 関係式は形を変えるか?

$$W_{\text{eff}}(S) = N\frac{\partial}{\partial S}F_{\text{free}}(S)$$

???

2. 自発的に破れた $\mathcal{N}$=2 超対称性を持つ $\mathcal{N}$=2, U(N) ゲージ模型

$\mathcal{N}=1$ superspace formalism [hep-th/0409060, 0503113]

$\mathcal{N}=2$ harmonic superspace formalism [hep-th/0510255]

by Fujiwara, Itoyama and Sakaguchi

以下では $\mathcal{N}$=1 superspace formalism で、$\mathcal{N}$=2 U(N) ゲージ模型を構成する。

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{U(N) vector superfield} & V^a = (A_\mu^a, \lambda^a) \\ \text{U(N) adjoint chiral superfield} & \Phi^a = (\phi^a, \psi^a) \end{array}\right.$$

gauge index: $a = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{overall U(1)}}}{0}, 1, \ldots, N^2 - 1$

U(N) ゲージ対称性を持つ一般的な作用は、以下の項からなる。

- <u>Kaehler term</u>

prepotential

$$S_K = \frac{-i}{2} \int d^4x d^4\theta \mathrm{Tr} \left(\bar{\Phi} e^{adV} \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} \right) + h.c.,$$

- <u>gauge kinetic term</u>

$$S_{\mathrm{gauge}} = \frac{-i}{4} \int d^4x d^2\theta \; \tau_{ab}(\Phi) \mathcal{W}^a \mathcal{W}^b + h.c.,$$

- <u>superpotential</u>

function of Φ

$$S_W = \int d^4x d^2\theta \mathrm{Tr} W(\Phi) + h.c.,$$

Discrete R 変換に対して、不変であることを要求すると

$$R : \lambda_I^a \equiv \begin{pmatrix} \lambda^a \\ \psi^a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \psi^a \\ -\lambda^a \end{pmatrix},$$

generalized gauge coupling $\tau_{ab}(\Phi)$ や superpotential は

$$\tau_{ab}(\Phi) = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a \partial \Phi^b}, \qquad W(\Phi) = e\Phi^0 + m\frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^0}.$$

- Fayet-Iliopoulos D-term

$$S_D = \int d^4x d^4\theta \xi V^0$$

e, m, ξ: real parameters FI 変数

よって、$\mathcal{N}$=2 超対称性を持った作用は

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & \int d^4x d^4\theta \left[\frac{-i}{2} \mathrm{Tr} \left(\bar{\Phi} e^{adV} \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} - h.c. \right) + \xi V^0 \right] \\
& + \int d^4x d^2\theta \left(- \frac{i}{4} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^a \partial \Phi^b} \mathcal{W}^a \mathcal{W}^b + e \Phi^0 + m \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi^0} \right) + h.c.
\end{aligned}
$$

ここからは、prepotential を以下のようにとる。

$$
\mathcal{F}(\Phi) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{g_k}{(k+1)!} \mathrm{Tr} \Phi^{k+1}
$$

Scalar potential

$$V = g^{ab}\left(\frac{1}{8}\mathcal{D}_a\mathcal{D}_b + \xi^2\delta_a^0\delta_b^0 + \partial_a\left(e\phi^0 + m\frac{\partial\mathcal{F}(\phi)}{\partial\phi^0}\right)\partial_{b^*}\left(e\phi^0 + m\frac{\partial\mathcal{F}(\phi)}{\partial\phi^0}\right)^*\right)$$

真空の条件: $\frac{\partial V}{\partial\phi^a} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \langle\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\phi^0\partial\phi^0}\rangle = -\left(\frac{e}{m} + i\frac{\xi}{m}\right)$$

この条件により、スカラー場 ϕ の真空期待値が決まり、ゲージ対称性は

$$U(N) \to \prod_{i=1}^{n} U(N_i)$$

フェルミオンの超対称変換の真空での値は

$$\langle \delta\lambda^{+a} \rangle \equiv \langle \delta \left(\frac{\lambda^a + \psi^a}{\sqrt{2}} \right) \rangle = 0$$

$$\langle \delta\lambda^{-a} \rangle \equiv \langle \delta \left(\frac{\lambda^a - \psi^a}{\sqrt{2}} \right) \rangle = -2im(\eta_1 - \eta_2)\delta_0^a$$

Nambu-Goldstone fermion !

Mass spectrum

- $\mathcal{N}=1$ massless $\prod_{i=1}^{n} U(N_i)$ vector multiplets: $V^a = (A_\mu^a, \lambda^{-a})$
- $\mathcal{N}=1$ massive $\prod_{i=1}^{n} U(N_i)$ adjoint chiral multiplets: $\tilde{\Phi}^a = (\tilde{\phi}^a, \lambda^{+a})$
- $\mathcal{N}=1$ massive vector multiplets corresponding to broken generators

Comment

FI変数の$e, m, \xi \to \infty$ の極限を考えると

$\Rightarrow$ $\mathcal{N}=1$ SYM + $W_{\mathrm{tree}}(\Phi)$

つまり、Dijkgraaf-Vafa などによって考えられた模型は、自発的に破れた超対称性をもつ模型の一つの極限として得られる。

この時、Nambu-Goldstone fermion は decouple する。

[K. Fujiwara '06]

3. Dijkgraaf-Vafa 関係式の変形

[H. Itoyama and K. M. arXiv:0704.1060 [hep-th]]

質量を持った場 Φ を積分して得られる effective superpotential を求める:

$$\exp\left[i \int d^4x (d^2\theta W_{\text{eff}} + h.c. + d^4\theta (\text{nonchiral terms}) \right] = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} e^{iS}.$$

$\mathcal{W}$ (or V) を背景場として、effective superpotential をこの量で書き表す。

$$\Longrightarrow \quad W_{\text{eff}}(S), \qquad S \equiv -\frac{1}{64\pi^2} \mathrm{Tr}_{\mathrm{U(N)}} \mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha$$

Holomorphy により、effective superpotential は anti-holomorphic coupling 依存しない。よって、$\bar{g}_k = 0$ for $k \geq 3$ とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x d^4\theta \frac{-i}{2} \mathrm{Tr}\left[\bar{\Phi} e^{adV} \frac{\partial \mathcal{F}(\Phi)}{\partial \Phi} - (\bar{g}_1 \bar{\Phi} + \frac{\bar{g}_2}{2} \bar{\Phi}^2) e^{adV} \Phi \right] + \int d^4x d^2\bar{\theta} \frac{m\bar{g}_2}{2} \mathrm{Tr}\bar{\Phi}^2 \\
&+ \int d^4x d^2\theta \mathrm{Tr}\left[m \sum_{k=2}^{n+1} \frac{g_k}{k!} \Phi^k - \frac{i}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{g_k}{k!} (\mathcal{W} \Phi^s \mathcal{W} \Phi^{k-1-s}) \right].
\end{aligned}
$$

$\bar{\Phi}$ を積分すると、

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^4x d^2\theta \mathrm{Tr}\left[m \sum_{k=2}^{n+1} \frac{g_k}{k!} \Phi^k - \frac{i}{4} \sum_{k=2}^{n+1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{g_k}{k!} (\mathcal{W} \Phi^s \mathcal{W} \Phi^{k-1-s}) \right] \\
&+ \int d^4x d^2\theta \mathrm{Tr}\left[-\frac{(\mathrm{Im} g_1)^2}{32 m \bar{g}_2} \Phi \bar{\nabla}^2 \nabla^2 \Phi + \ldots \right].
\end{aligned}
$$

higher order in $1/m$

◆ 2次の項 $(\bar{\nabla}^2\nabla^2\Phi = 16(\partial^\mu\partial_\mu\Phi - \frac{1}{2}ad\mathcal{W}^\alpha D_\alpha\Phi))$

$$\frac{1}{2}\Phi\left(-\partial^\mu\partial_\mu + \frac{1}{2}ad\mathcal{W}^\alpha D_\alpha + m' - ig_3'\mathcal{W}\mathcal{W}\right)\Phi$$

Propagator

$$\Delta(p,\pi) = \int_0^\infty ds e^{-s(p^2+m'+\frac{1}{2}ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha - ig_3'\mathcal{W}\mathcal{W})}$$

◆ 相互作用項

$$\frac{mg_k}{k!}\mathrm{Tr}\Phi^k \quad \text{for} \quad k = 3,\ldots,n+1$$

$$-\frac{i}{4}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{g_k}{k!}(\mathcal{W}\Phi^s\mathcal{W}\Phi^{k-1-s}) \quad \text{for} \quad k = 4,\ldots,n+1$$

Dijkgraaf-Vafa によって考えられた模型の場合

●propagator

$$\Delta(p,\pi) \;=\; \int_0^\infty ds e^{-s(p^2+m'+\frac{1}{2}ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha)}$$

$$\left(e^{-\frac{s}{2}ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha} = 1 - \frac{s}{2}ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha + \frac{s^2}{8}(ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha)^2\right)$$

●vertices

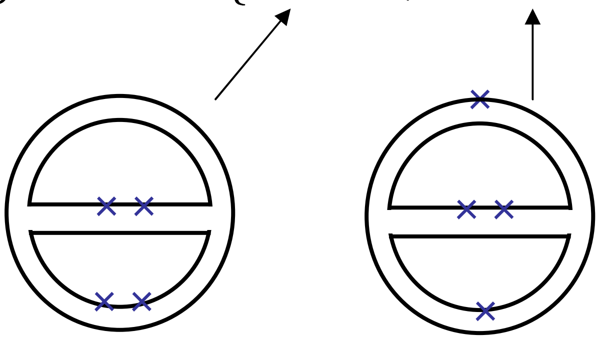
$$\frac{mg_k}{k!}\mathrm{Tr}\Phi^k \qquad \text{for} \quad k = 3,\ldots,n+1$$

2-loop diagram

$$\left(S = -\frac{1}{64\pi^2}\mathrm{Tr}_{\mathrm{U(N)}}\mathcal{W}^\alpha\mathcal{W}_\alpha,\; w^\alpha = \frac{1}{8\pi}\mathrm{Tr}_{\mathrm{U(N)}}\mathcal{W}^\alpha\right)$$

$$\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}d^2\pi_1 d^2\pi_2 \Delta(p_1,\pi_1)\Delta(p_2,\pi_2)\Delta(-p_1-p_2,-\pi_1-\pi_2)$$

$$= \int ds_1 ds_2 ds_3 e^{-(\sum s_i)m'}\{3NS^2 + 6Sw^\alpha w_\alpha\}$$



×: insertion of $\mathcal{W}$

ℓ-loop diagrams では

$$\left(\prod_{i=1}^{\ell+1}\int ds_i\right) e^{-(\sum s_i)m'}\{(\ell+1)NS^{\ell}+\ell(\ell+1)S^{\ell-1}w^{\alpha}w_{\alpha}\}$$

W_{eff} に対するℓ–loop の寄与 $W_{\text{eff}}^{(\ell)}(S)$ は

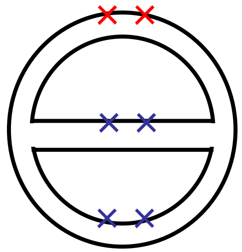
$$W_{\text{eff}}^{(\ell)}(S)=N\frac{\partial}{\partial S}\mathcal{F}^{(\ell)}(S)+\left(\frac{\partial^2}{\partial S^2}\mathcal{F}^{(\ell)}(S)\right)w^{\alpha}w_{\alpha}$$

この $\mathcal{F}^{(\ell)}(S)$ は行列模型からも計算できる。（Dijkgraaf-Vafa の関係）

$$\mathcal{F}^{(\ell)}(S)=F_{\text{Free}}^{(\ell)}(S)$$

自発的に破れた超対称性を持つ模型の場合

$$\Delta(p,\pi) \;=\; \int_0^\infty ds e^{-s(p^2+m'+\frac{1}{2}ad\mathcal{W}^\alpha\pi_\alpha)}\; e^{sig'_3\mathcal{W}\mathcal{W}}$$



2-loop diagram

$$\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}d^2\pi_1 d^2\pi_2$$
$$\Delta(p_1,\pi_1)\Delta(p_2,\pi_2)\Delta(-p_1-p_2,-\pi_1-\pi_2)$$

$$= \int ds_1 ds_2 ds_3 e^{-(\sum s_i)m'}\{3NS^2+6Sw^\alpha w_\alpha - ig'_3(\sum s_i)S^3\}$$

結局

$$W_{eff}^{(\ell)} = N\frac{\partial\mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S} + \frac{\partial^2\mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S^2}w^\alpha w_\alpha - \frac{16\pi^2 img_3}{mg_2}\left(\frac{\partial\mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S}\right)\frac{S}{m} + \ldots + \mathcal{O}((1/m)^2)$$

4. Conclusion

● 自発的に破れた $\mathcal{N}$=2 超対称性を持つU(N)ゲージ模型の effective superpotential を計算した。

● effective superpotential は自発的に破れた超対称性によって影響を受けている。

$$W_{eff}^{(\ell)} = N\frac{\partial \mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S^2} w^{\alpha} w_{\alpha} - \frac{16\pi^2 i m g_3}{m g_2}\left(\frac{\partial \mathcal{F}^{(\ell)}}{\partial S}\right)\frac{S}{m} + \cdots$$

● Dijkgraaf-Vafa の関係は自発的に破れた超対称性によって、変形されることがわかった。

Future works

- $\mathcal{N} = 2$ Seiberg-Witten curve
- relation to superstring theory
  - D-brane realization of the model considered above
  - geometric transition
  - flux induced superpotential
- include fundamental hypermultiplets